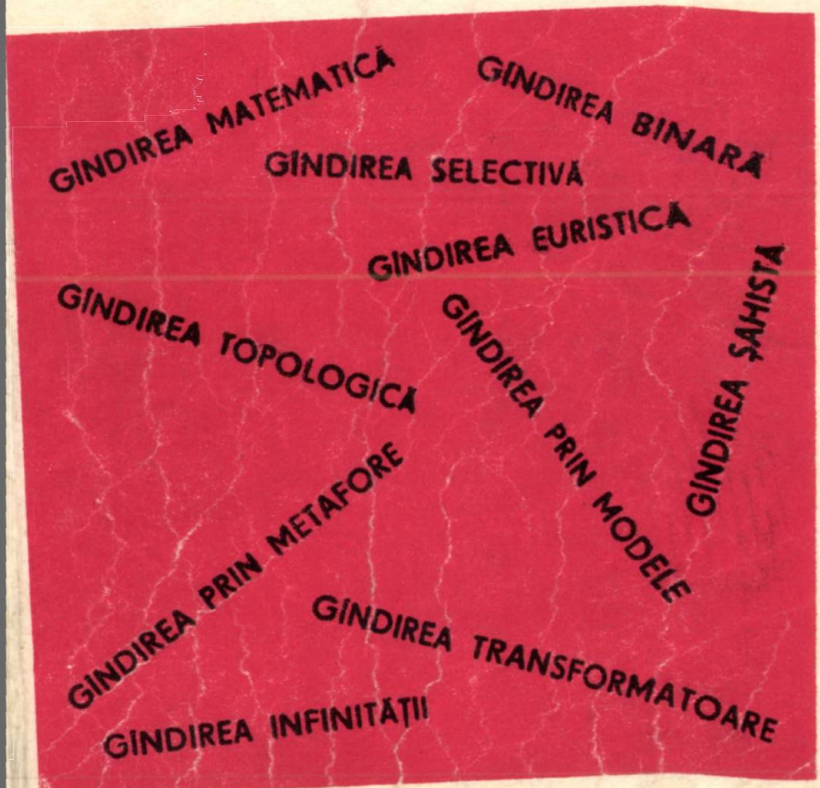
281

SOLOMON MARCUS

Moduri de gîndire



Știința pentru toți

Cunoștințe despre om și societate

COLECȚIA „ȘTIINȚA PENTRU TOȚI"
apare sub egida
CONSILIULUI NAȚIONAL
AL
FRONTULUI DEMOCRAȚIEI ȘI UNITĂȚII SOCIALISTE

SOLOMON MARCUS

149.9
M 31

Moduri de gîndire

64.58

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ ȘI ENCICLOPEDICĂ
București, 1987

Ilustrația copertei: Gheorghe G. MARINESCU

CUPRINS

Cuvînt înainte 5
Gîndirea matematică 7
Gîndirea combinatorie elementară 12
Gîndirea binară 15
Gîndirea selectivă 18
Gîndirea prin metafore 20
Gîndirea prin modele 23
Gîndirea triadică în semiotică 31
Gîndirea triadică a materiei 37
Alte aspecte ale gîndirii triadice 41
Gîndirea topologică 50
Gîndirea energetic-entropică 52
Gîndirea ipotetică şi combinatorie 56
Gîndirea infinităţii 64
Gîndirea transformatoare 72
Gîndirea prin numere remarcabile; goana după zecimalele lui pi 77
Gîndirea prin numere remarcabile: numărul de aur . 80
Gîndirea combinatorie şi computaţională 83
Gîndirea şahistă, între algoritm şi intuiţie . . . 102
Gîndirea euristică şi arta de a găsi un interlocutor . 114

CUVÎNT ÎNAINTE

Varietatea extraordinară a problemelor moderne ale științei cere din partea cercetătorilor o diversificare corespunzătoare a metodelor de investigație. O parte a acestor metode este prezentată în cele ce urmează. Am avut în vedere cu precădere metode inspirate de științele exacte, dar care, prin orientarea interdisciplinară a cercetării, au căpătat o considerabilă rază de acțiune. Spațiul acordat unei metode nu este proporțional cu importanța ei. Astfel, gîndirea binară, fundamentală în toate științele, ar putea forma ea singură obiectul unei ample monografii. Pentru a desprinde din fiecare metodă tipul de gîndire pe care ea o presupune, am căutat să reducem la minim aspectele tehnice ale problemelor discutate. Sperăm că, în acest fel, lucrarea de față devine accesibilă unei categorii largi de cititori.

ianuarie 1985

GÎNDIREA MATEMATICĂ

A gîndi matematic! Iată un deziderat deseori formulat, dar căruia nu i s-a deslușit încă înțelesul deplin. Lăsăm deoparte interpretările vulgarizatoare, bazate pe ignoranță (dar alimentate de atîtea prezentări nefericite ale matematicii), după care gîndirea matematică s-ar manifesta prin capacitatea de a memora date numerice și de a efectua cu cît mai mare rapiditate diferite calcule. Se crede de obicei că a gîndi matematic înseamnă a gîndi exact. Într-o convorbire la televiziune, Gr. C. Moisil spunea că matematica este partea exactă a gîndirii. Dar cu cine intră aici în opoziție atributul de exactitate? Căci dacă *exact* se opune lui *aproximativ*, cădem într-o capcană, pentru că în matematică aproximația e la fel de importantă ca și exactitatea. Gîndirea matematică revine la aproximații exacte. Cu alte cuvinte, matematica propune descrieri care sînt simplificări ale realității, dar aceste simplificări sînt precizate cu toată rigoarea.

Un alt aspect al gîndirii matematice, pe care unii îl consideră primordial, este natura ei deductivă. Pornind de la cîteva definiții și cîteva propoziții acceptate pe baza unei experiențe intuitive sau a unei anumite convenții, matematica se dezvoltă pe cale deductivă, cristalizîndu-se în propoziții din ce în ce mai complexe, numite teoreme. Teorema este cără-

mida matematicii, spunea cineva. Datorită teoremelor, matematica înaintează spre adevăruri din ce în ce mai profunde.

Însă simpla corectitudine a unei teoreme nu este o garanție a valorii ei. Pentru ca o teoremă să fie interesantă e necesar ca ea să fie semnificativă, cu alte cuvinte să răspundă la o problemă reală, pe care dezvoltarea științei o impune. Astfel de probleme nu sînt totdeauna explicit formulate; ele trebuie descoperite. Poate că tocmai în această artă de a găsi și ordona întrebările se află dificultatea principală a activității matematice. De aceea se și spune că o problemă matematică bine pusă este pe jumătate rezolvată; iar acei matematicieni care colaborează cu ingineri sau economiști, cu fizicieni, psihologi sau medici știu că principala dificultate într-o astfel de colaborare este aceea de a converti întrebările acestora în altele, nu esențial diferite, dar „bine puse".

Înțelegem astfel că deducția este un aspect al unui fenomen mai general, care domină gîndirea matematică: procedarea în etape riguros ordonate, fiecare etapă sprijinindu-se esențial pe etapele anterioare. Tocmai din această structură în etape rezultă necesitatea de a se folosi notații, termeni și calcule strict reglementate, prin intermediul cărora noțiunile și rezultatele etapelor anterioare sînt exprimate într-un mod convenabil unei utilizări ulterioare. S-ar putea spune că procesul de matematizare a unei științe revine la îndeplinirea fermă a acestui deziderat de a se proceda în etape riguros ordonate, înlăturîndu-se astfel posibilitatea unor considerații ad-hoc, deci care s-ar sustrage disciplinei impuse de etapele anterioare. Gîndirea matematică este tocmai legitimarea acestei severități. Dar tot atît de legitimă e abolirea acestei severități, deci dezvoltarea altor modalități de gîndire.

Se poate pune însă întrebarea dacă, într adevăr, esența matematicii este deducția. Modul în care matematica e prezentată diferă mult de modul în care ea e elaborată. Cele mai multe teoreme sînt mai întîi bănuite, intuite, imaginate și numai după aceea demonstrate. De multe ori se întîmplă ca cel care descoperă o teoremă să-i dea o demonstrație greșită sau inutil complicată, urmînd ca un alt autor, care o examinează ulterior, să-i dea o demonstrație acceptabilă. Multe construcții matematice își datorează succesul nu atît corectitudinii lor logice (necesare, desigur), cît faptului că răspund la o problemă interesantă. Deci relevanța lor rezultă nu atît din aspectul lor logic, cît din aspectul lor analogic, adică din capacitatea lor de a modela anumite situații care se cer studiate.

Ajungem astfel la un alt atribut al gîndirii matematice, acela al naturii ei analogice. Matematician este acela care e capabil să dezvolte analogii, spunea marele matematician polonez St. Banach. Analogii între noțiuni, între idei, între teoreme, între demonstrații, între domenii și chiar analogii între analogii. Într-adevăr, matematica se dezvoltă în etaje care refac, la un nivel superior de generalitate, construcții existente la nivelele inferioare. Bătrîna teoremă a lui Pitagora, de exemplu, reapare într-o formă mult mai generală și sub alte denumiri în Analiza matematică modernă. Conceptul elementar de perpendicularitate (ortogonalitate) reapare și el în forme mai abstracte.

Analogia este forma principală sub care se manifestă procesele de abstracție. Ea a devenit o metodă fundamentală în toate științele, nu numai în matematică. Dar nu e mai puțin adevărat că, în măsura în care o știință dezvoltă analogii în mod sistematic,

consecvent și explicit, ea intră în raza de influență a matematicii.

În prefața unui tratat celebru de prezentare a structurilor matematice, tratat datorat grupului de matematicieni cunoscut sub numele de Nicolas Bourbaki, cititorul este anunțat că nu i se pretinde, pentru înțelegerea tratatului respectiv, nici un fel de cunoștințe matematice prealabile; singurul lucru care i se cere este o anumită deprindere de gîndire matematică. Profesorul meu, regretatul academician Miron Nicolescu, mergea mai departe, invitîndu-ne chiar din prima lecție a anului întîi, să facem *tabula rasa* din cunoștințele noastre matematice anterioare și să abordăm Analiza matematică cu o privire proaspătă, fără nici o idee preconcepută.

Cum trebuie interpretate astfel de invitații de a șterge din memorie numeroase cunoștințe dobîndite de-a lungul unor ani de trudă? Ce semnificație trebuie să atribuim posibilității înțelegerii unui tratat de matematică superioară, fără a ne sprijini pe cunoștințele matematice dobîndite în școală? Căci dacă tratatul lui Bourbaki introduce pe o cale proprie toate definițiile necesare pentru înțelegerea textului, rămîne de lămurit cum anume se poate dobîndi, altfel decît prin studiul matematicii, acea deprindere de gîndire fără de care supunerea la disciplina impusă de un atare tratat nu este posibilă.

Ca și arta, știința presupune capacitatea de a te întoarce mereu la întrebările de început, de a relua, cu o optică nouă, problemele vechi. Uitarea are aici un rol important. Dar este vorba de o uitare parțială, o operație care separă cunoștințele de deprinderi, reținîndu-le numai pe acestea din urmă. Așa se explică faptul că unele discipline studiate în școală sînt reluate, la universitate, de la primele cunoștințe. E adevărat că uneori trebuie să luptăm

și împotriva unor deprinderi (căpătate printr-o instrucție sau educație defectuoasă); apare un adevărat proces de dezvățare, care-și are probabil problemele sale specifice. Nu le vom discuta aici și nici nu știm dacă ele au fost elucidate.

Există, desigur, o afinitate a unora pentru gîndirea matematică, independent de instrucția pe care ei au primit-o. Această înclinare se manifestă mai cu seamă în ușurința cu care aceștia se inițiază în unele domenii ale matematicii finite, dacă au și o motivație puternică pentru a o face. Așa s-a întîmplat în ultimii ani cu numeroși studenți sau absolvenți (e drept, dintre cei mai buni) ai unor facultăți umaniste. Lipsiți de orice idee preconceputâ cu privire la matematică, ei s-au inițiat în probleme privind echilibrul în grafuri, atît de frecvente în studiul relațiilor sociale. Au descoperit în teoria jocurilor de strategie un instrument adecvat de înțelegere a structurii unui conflict. Cu ajutorul gramaticilor formale, au cercetat mecanismele generative ale unor procese sociale. Și-au însușit elemente de probabilități discrete și au învățat să folosească, tot în cazul discret, unii parametri informaționali. Nu am spune totul dacă nu am adăuga faptul că, pentru toate aceste domenii ale matematicii moderne, ei au putut beneficia de prezentări accesibile și agreabile, lucru care n-ar fi fost posibil în urmă cu vreo 25 de ani.

Nu mai puțin interesantă este și cealaltă față a monedei. Mulți diplomați universitari sînt confruntați, la locul lor de muncă, cu probleme care nu reclamă aplicarea unor cunoștințe sau tehnici determinate, însușite în facultate, dar au nevoie, pentru a fi rezolvate, de tiparele de gîndire și de situațiile logice care se desprind din materia învățată. De capacitatea de a stabili astfel de conexiuni de-

pinde în mare măsură reușita profesională. Acest examen „la distanță", fără profesor și fără note, poate fi mai greu urmărit, rezultatele sale pot fi mai greu cuantificate și contabilizate, pentru că însuși statutul gîndirii științifice este încă insuficient precizat. Astfel, gîndirea matematică se prezintă sub mai multe forme, destul de diferite între ele; gîndirea aritmetico-combinatorie, care atribuie fiecărui număr o anumită „personalitate", gîndirea algebrică (cu tendință de generalitate maximă, orientată mai cu seamă spre structuri generale) și gîndirea probabilistă ar fi trei dintre acestea. Există apoi matematicieni care excelează în construcții individuale insolite, foarte diferiți de cei care preferă o cît mai mare generalitate. Informatica matematică a promovat gîndirea algoritmică, substanțial diferită de formele menționate anterior. Dar dacă un tînăr matematician reușește să-și formeze măcar unul dintre aceste tipuri de gîndire, afirmarea sa profesională devine posibilă.

GÎNDIREA COMBINATORIE ELEMENTARĂ

Un pedagog canadian, Z. P. Dienes, a avut ideea de a pune la dispoziția copiilor preșcolari o trusă cu 48 de piese din carton, variabile ca mărime (unele mici, altele mari), ca formă (cerc, pătrat, dreptunghi, triunghi), ca dimensiune (groase sau subțiri) și culoare (roșu, galben, albastru). Varietatea și importanța educativă a problemelor care pot fi propuse copiilor în legătură cu aceste 48 de cartoane au determinat o răspîndire rapidă a experimentului lui Dienes în numeroase țări, inclusiv în țara noastră. Într-adevăr, manipularea acestor piese din carton permite: sesizarea unor ipostaze fundamentale ale obiectelor, ca acelea reprezentate de mărime, formă,

dimensiune și culoare; dezvoltarea gîndirii analogice, prin punerea laolaltă a obiectelor cu anumite proprietăți comune, și a gîndirii disociative, prin așezarea în clase diferite a obiectelor care se disting din anumite puncte de vedere; formarea gîndirii combinatorii, prin varietatea de situații pe care le oferă cele 48 de submulțimi de cartoane; formarea deprinderilor de gîndire logică și ansamblistă, prin efectuarea (implicită) a unor operații de disjuncție, conjuncție și negație logică, respectiv de reuniune, intersecție și luare a complementarei; dezvoltarea aptitudinilor de calcul, prin operațiile aritmetice implicate de operațiile logice și de combinare menționate mai sus.

În simplitatea sa derutantă, trusa lui Dienes dezvăluie copiilor un întreg univers, sub forma unui joc. Considerat de pedagogi ca o inițiere în matematică, exercițiul de tip Dienes este, în egală măsură, o pregătire pentru inginerie și artă, pentru medicină și filozofie, pentru activitatea practică și cea speculativă.

Evident, exercițiile preconizate de Dienes sînt numai una din modalitățile de antrenament pentru gîndirea interdisciplinară. Am mai putea aminti, de exemplu, experiența franceză și belgiană în învățarea concomitentă a gramaticii, logicii și matematicii (Lucienne Felix, Yves Gentilhomme, Georges Van Hout). Dar trusa lui Dienes rămîne o schemă abstractă, a cărei actualizare impune înlocuirea cartoanelor prin obiecte și ființe care populează universul accesibil copiilor și adăugarea, la cele patru atribute menționate, a altora, specifice domeniului biologic, uman sau social. În acest fel, o simplă gimnastică a minții e convertită într-o activitate de cunoaștere a realității.

Am avut prilejul de a vedea modul în care școala elveţiană a aşezat această concepţie la baza educaţiei intelectuale a elevilor din primele clase. Manualul, alcătuit din fişe care pot fi detaşate, devine caietul de lucru al copilului. La fiecare pagină i se adresează o invitaţie: Colorează ciupercile pe care copiii le pot culege fără a depăşi bariera; colorează cîmpia care se învecinează cu lacul şi cu pădurea; găseşte drumul cel mai scurt pe care marinarul ajunge în port sau traseul pe care trebuie să-l urmeze un camion care are de transportat marfă la fiecare magazin, în aşa fel încît să treacă o singură dată prin fiecare intersecţie. O clasificare arborescentă a unor melci, după cum ei dorm sau se deplasează, sînt cafenii sau galbeni, uniformi sau vărgaţi, îi invită pe elevi să deseneze, la capătul fiecărei ramuri, melcul corespunzător. Cinci iepuri urmează să devină nodurile unui graf în care arcele sînt orientate dinspre iepurii mai mici spre cei mai mari (exerciţii similare pentru relaţia de *mai lung, mai înalt, cu mai multe ferestre sau petale).* Personaje din basme sînt angajate în relaţii dintre cele mai variate. Elevul este invitat să urmărească cu o linie neagră nişte puncte numerotate de la 1 la 56 şi cu o linie roşie punctele numerotate, în ordine descrescătoare, de la 100 la 66. Recompensa este o pisică jucîndu-se cu o minge iar într-un alt exerciţiu, de acelaşi tip, un ied care atinge o floare.

Orientarea promovată la noi în ţară, prin noul manual pentru clasa întîi, a fost, la origine, motivată de principii asemănătoare celor de mai sus. Dar manualul a putut fi ameliorat prin renunţarea parţială la unele consideraţii despre mulţimi pentru care nu e provocată curiozitatea reală a copilului (asociativitate, comutativitate etc.) sau care nu corespund capacităţii sale de înţelegere; el mai poate

fi ameliorat în continuare printr-o accentuare a problemelor de comparație, alegere și strategie; printr-o atenție mai mare dată aspectelor nenumerice, poziționale, calitative; prin sublinierea elementelor de joc, de căutare, de invenție.

GÎNDIREA BINARĂ

De cînd a devenit celebru numărul 2? În orice caz, nu mai tîrziu de mijlocul secolului trecut, cînd englezul George Boole publică două lucrări care-și propuneau să dezvolte un calcul al raționamentului deductiv (1847) și să stabilească unele legi ale gîndirii (1854). Boole rupe cu tradiția; el dezvoltă logica sub forma unei construcții formale, căreia îi va căuta apoi o interpretare. Obiectele cu care lucrează sînt următoarele: a) simboluri literale ca x, y, z, reprezentînd lucrurile sau mai bine zis clasele de lucruri de care se ocupă gîndirea noastră (clase exprimate de obicei prin substantive și adjective); b) semne ca $+$, $-$, $\times$ reprezentînd operații aplicate obiectelor gîndirii și exprimate prin cuvinte ca *și, sau, exceptînd, dar nu și* etc.; c) semnul de identitate $=$ (exprimat printr-un verb). Sintaxa algebrică a acestor semne funcționează în analogie cu sintaxa logică: $xy = yx$ *(case frumoase = frumoase case)*, $x+y = y+x$ *(flori și idei = idei și flori)*, $z(x+y) = zx+zy$ (creatorii *(savanți și artiști) = creatorii savanți și creatorii artiști)*; $z(x-y) = zx-zy$ *(creatorii (savanți dar nu și artiști) = creatorii savanți, dar nu și cei artiști).*

Să observăm însă, în cadrul acestei analogii, o anomalie. În logica ordinară, o clasă combinată cu ea însăși rămîne neschimbată: $x^2 = x$. Mai general $x^n = x$. Nu același lucru se întîmplă în algebră... cu excepția a două cazuri, în care se regăsește ana-

logia cu logica. Aceste cazuri corespund, observă Boole, valorilor zero şi unu ale lui x: $0^2 = 0$, $1^2 = 1$.

Aşadar, o sintaxă algebrică aplicată unor variabile susceptibile de a lua numai valorile zero şi unu este izomorfă sintaxei logice a gîndirii noastre. Aşa s-a născut calculul logic al lui Boole, algebra sa binară. Algebric, *unu* reprezintă clasa universală iar zero clasa vidă. Logic, *unu* exprimă adevărul iar *zero* falsul, dar tot atît de bine unu reprezintă pe *da* iar zero pe *nu*. Algebra lui zero şi unu, pe care ne-o propune Boole, se referă deci la atitudinile noastre extreme, de adeziune sau contestaţie, de afirmare sau negare; îndoiala nu-şi are loc aici. Ulterior, drept copulă fundamentală în locul identităţii a fost introdusă incluziunea. Maşinile aritmetice şi algebrice ale lui Pascal, Leibniz şi Babbage sînt continuate şi depăşite de „pianul logic" al lui W. S. Jevons, construit la 1870 pe baza ideilor lui Boole.

Constituind azi obiectul unui capitol important al matematicii, algebra lui Boole intervine esenţial în utilizarea calculatoarelor electronice (inclusiv a minicalculatoarelor şi a calculatoarelor de buzunar), construite, de cele mai multe ori, pe sistemul de numeraţie în baza 2, a cărui realizare mecanică sau electrică este foarte comodă (*unu* e reprezentat prin prezenţa unui impuls electric iar *zero* prin absenţa sa). *Unu* şi *zero* sînt folosiţi aici nu atît ca numere, cît ca simboluri logice, exprimînd cele două stări posibile ale unui sistem binar. Observaţii de acest fel au condus, în anii '40 şi '50, la aplicaţii importante ale logicii matematice în studiul circuitelor electrice şi al altor mecanisme automate (de exemplu, Gr. C. Moisil şi şcoala sa).

Gîndirea binară stă la baza teoriei informaţiei, unde conceptul de entropie se defineşte cu ajutorul

logaritmului în baza 2, iar teoria codurilor, fundată în 1950 de R. W. Hamming, se folosește de reprezentarea binară a cuvintelor unui cod. Teoria clasificării este și ea tributară viziunii binare. Cea mai naturală clasificare este aceea în care, la fiecare etapă, o categorie este analizată în două subcategorii complementare.

O varietate importantă a gîndirii binare este gîndirea dihotomică (de împărțire în două a unei entități). Dihotomiile limbă-vorbire, sincronie-diacronie, conținut (semnificat)-expresie (semnificant), paradigmatic-sintagmatic, propuse de Ferdinand de Saussure în primele decenii ale secolului nostru, au devenit fundamentale în lingvistică și în semiologie. În deceniul al patrulea, relațiile (opozițiile) lingvistice au fost dezvoltate pe o bază binară de N. S. Trubetzkoy iar mai tîrziu Roman Jakobson a arătat că există un număr relativ mic de trăsături distinctive binare, cu ajutorul cărora se poate reprezenta sistemul fonologic al oricărei limbi. Louis Hjelmslev a introdus dihotomia substanță-formă, aplicată de el atît conținutului cît și expresiei, iar, mai aproape de zilele noastre, Noam Chomsky a fundat o nouă dihotomie, relativă la competență și performanță, care stă la baza întregului comportament uman. Să mai amintim că paradoxul lui Zenon, privind imposibilitatea mișcării, se bazează pe ideea dihotomizării la infinit a spațiului și timpului.

Gîndirea binară este o componentă esențială a gîndirii algoritmice, din ce în ce mai importantă în tot mai multe compartimente ale vieții sociale. Am dedicat gîndirii algoritmice o întreagă carte (a se vedea lucrarea noastră *Gîndirea algoritmică*, Colecția „Știința și tehnica pentru toți", Ed. Tehnică, 1982).

LICEUL „AGRONOMICA ZAR" BIBLIOTECA BUCUREȘTI

GÎNDIREA SELECTIVĂ

Cîte obiecte aducem în casă într-o zi? La cîte renunțăm? Este suficient ca volumul celor dintîi să întreacă numai cu puțin pe al celorlalte pentru ca, după un timp, locuința să devină... de nelocuit. Iar dacă hîrtiile care ni se adună în buzunare nu sînt triate din cînd în cînd, ele devin inutilizabile.

Situații asemănătoare apar în legătură cu acele lucruri nevăzute pe care le numim informații. Înțelepciunea de a renunța la timp la cunoștințele perimate este o condiție esențială a disponibilității noastre pentru ceea ce este nou. Însă, aici, procesul cel mai important este cel al simplificării, concentrării, reorganizării informațiilor anterioare, în așa fel încît ele să încapă într-un volum cît mai mic de memorie și să se racordeze cît mai natural cu informațiile noi. Dar utilizăm efectiv această posibilitate? O încăpere care se umple cu obiecte între care nu ne mai putem mișca și descurca ne avertizează, chiar prin acest fapt, asupra măsurilor pe care trebuie să le luăm. Fenomenul corespunzător, privind creierul uman, este însă mai greu sesizabil, consecințele nu mai sînt atît de clare și de imediate (deși nu-s cu nimic mai puțin grave).

Astfel de probleme sînt importante nu numai pentru persoane ci și pentru instituții. Aflăm din presă că o comisie guvernamentală a studiat timp de mai mulți ani posibilitatea realizării unui sistem informațional unitar, în vederea sistematizării și simplificării informației acumulate în diferite sectoare ale vieții economice și administrative. Timp de cinci ani s-a studiat circulația hîrtiilor la trei consilii populare comunale, s-a folosit experiența mai multor județe și s-a cristalizat astfel posibilitatea standardizării unui mare număr de tipuri de docu-

mente şi, în acelaşi timp, a eliminării altora. De îndată ce această posibilitate va deveni realitate (rolul calculatoarelor electronice este aici evident), se va realiza o mare economie de muncă, de timp, de hîrtie, o calitate superioară a informaţiei, o mai bună păstrare şi o mai obiectivă prelucrare a ei.

Nu este însă vorba numai de atît. De modul în care circulă hîrtiile depind calitatea dialogului pe care ele îl mijlocesc, preluarea la timp a experienţei sociale acumulate. Nu este suficient ca, în dezbaterea unei probleme, să aducem o experienţă personală interesantă, pentru a putea lua o decizie bună; mai trebuie, în plus, să dispunem de o sinteză a părerilor altor specialişti, eventual de o bibliografie comentată privind problema respectivă. Trebuie de asemenea să existe un loc (eventual acelaşi în care am găsit sinteza şi bibliografia la care ne-am referit mai sus) unde punctul nostru de vedere e înregistrat şi pus la dispoziţia celor care se vor ocupa ulterior de probleme similare. Ca şi în ştiinţă, progresul în administraţie, învăţămînt şi organizare se realizează sub forma sportivă a ştafetei: fiecare preia rezultatele obţinute şi le duce mai departe. Pentru unele probleme, acel loc unde se centralizează toate punctele de vedere l-ar putea constitui ministerele de resort, deoarece acestea pot elabora decizii bune numai pe baza unei informaţii cît mai complete. Probabil că aşa se şi întîmplă în unele cazuri.

Pentru a ne da seama de dificultatea problemelor atinse mai sus, vom menţiona faptul că, chiar la nivelul elementar pe care îl constituie terminologia, manipularea informaţiei este încă deficitară. Într-un domeniu ca electrotehnica sau chimia organică se lucrează cu sute de mii de termeni. O judicioasă codificare şi decodificare a lor este încă

un deziderat. Probleme dificile, încă nerezolvate, apar în ceea ce privește manipularea denumirilor de medicamente. Un efort uriaș este investit pretutindeni în rezolvarea acestor probleme de prelucrare automată a informației.

Sîntem preocupați de a încărca planurile și programele de învățămînt, manualele școlare și universitare cu noi și noi date ale științei, dar din păcate nu acordăm aceeași atenție necesității și posibilității de eliminare a chestiunilor perimate (de exemplu, astfel de chestiuni abundau, acum cîțiva ani, în manualul de trigonometrie de clasa a X-a). Sînt încă multe cărți prea groase, multe articole prea lungi în raport cu ceea ce conțin, multe spectacole care se prelungesc dincolo de adevăratul lor sfîrșit. Un val de informație vine spre noi fără să ne întrebe; trebuie să știm să-l stăvilim, preluîndu-l în mod selectiv. Dar există și o altă informație, în unele cărți și, mai ales, în natură și în realitate, care așteaptă discretă ca noi să venim la ea, s-o descifrăm.

Această atitudine selectivă, această dialectică a acceptării și renunțării se instaurează și în zona delicată a vieții noastre afective, a relațiilor noastre umane. De felul în care ele sînt orientate depind în bună măsură succesele și eșecurile noastre.

GÎNDIREA PRIN METAFORE

În 1857, matematicianul englez Arthur Cayley și-a propus să rezolve următoarea problemă de chimie: Cîte tipuri de izomeri ai hidrocarburilor saturate C_nH_{2n+2} există pentru diferite valori ale lui n. Pentru $n = 1, 2, 3$ se obțin, respectiv, metanul, etanul și propanul iar pentru $n = 4$ butanul și izobutanul. Problema lui Cayley devine interesantă pe

măsură ce n crește. Cayley a identificat aici o problemă mai generală, mai abstractă, independentă de interpretarea ei în chimie: Cîți arbori există, cu un număr fix de noduri, astfel încît fiecare nod să fie sau extremitatea unei singure ramuri, sau extremitatea a exact patru ramuri? Menționăm că aici termenii *arbore, nod* și *ramură* au accepțiuni matematice care corespund sensului lor intuitiv; utilizarea lor metaforică este sugerată chiar de reprezentarea geometrică a izomerilor în discuție.

Chimia a continuat să fie o sursă de sugestii pentru teoria matematică a grafurilor în special prin lucrările lui G. Pólya care, în 1937, a publicat un studiu amplu, de natură combinatorie, privind legăturile chimice. În ultimele decenii, folosirea metaforică a unor termeni din chimie (ca atom, moleculă, valență) s-a extins în numeroase domenii, uneori tinzînd să se transforme într-o analogie mai amplă, mai sistematică și mai profundă. Avem în vedere unul din fenomenele cele mai interesante din metodologia modernă a științelor: întrebuințarea unei metafore ca punct de plecare pentru elaborarea unui model pentru un fragment al realității. Nu poate fi vorba de superioritatea, din punct de vedere gnoseologic, a modelului față de metaforă. Un model nu este, în general, nici mai mult, nici mai puțin, decît o metaforă, ele fiind două modalități alternative, nu concurente. Dar, deoarece atît modelul cît și metafora se bazează pe o analogie, este posibilă între ele o stimulare reciprocă, de care nu este străină legătura profundă dintre știință și artă. A se vedea, în această privință, cartea lui Max Black, *Models and metaphors* (Cornell University Press, Ithaca, New York, 1962—1968).

Dacă, în secolul trecut, arborii chimici reprezentați de unii izomeri au sugerat o problematică mate-

matică de mare însemnătate azi în procesul de modelare, prin arbori, a unor structuri care intervin în informatică, lingvistică și teoria clasificării, în secolul nostru sugestiile de acest fel au devenit din ce în ce mai îndrăznețe. Astfel, Johan Galtung, unul dintre cei mai importanți specialiști în problemele viitorului și dezvoltării, a propus relativ recent (a se vedea articolul său din volumul al doilea al lucrării *Mathematical Approaches to International Relations*, publicat în 1977 de Academia de Științe Sociale și Politice) o analogie interesantă între structurile chimice și cele sociale. Unei molecule organice îi asociază un sistem social, iar unui atom o persoană sau o poziție, o funcție socială. O moleculă nu neapărat organică e asociată unui sistem nu neapărat social. Unei formule chimice empirice (deci care indică numai natura atomilor care intră în compoziția unei molecule și proporția lor numerică) i se asociază o informație privind tipurile de funcții sociale și proporția în care ele apar în cadrul unui sistem social. Unei formule chimice moleculare (deci care indică numărul de atomi de fiecare tip care intră în compoziția unei molecule) îi corespunde informația privind, pentru fiecare tip de funcție socială, numărul de funcții de tipul respectiv în sistemul considerat. Se știe că în interiorul fiecărei formule moleculare există diferite formule structurale, care determină, prin apartenența lor la aceeași formulă moleculară, ceea ce se numește o clasă de izomeri. Unei formule chimice structurale îi corespunde graful care descrie interacțiunile dintre diferitele persoane, diferitele funcții sociale care alcătuiesc un sistem social. Se știe că fiecare atom are o valență, exprimată printr-un număr care arată capacitatea atomului respectiv de a se conecta la alți atomi, într-o structură moleculară. Astfel, atomul de car-

bon are valența 4, cel de oxigen are valența 2, iar cel de hidrogen valența 1. În mod analog, fiecare element component al unei structuri sociale are o anumită capacitate de interacțiune cu celelalte elemente ale sistemului. Aceleași persoane se pot constitui în mai multe structuri sociale, care aparțin aceluiași „izomer social". De exemplu, aceiași studenți se pot organiza într-o grupă de seminar, dar și într-o echipă sportivă.

Galtung continuă această analogie, din care nu lipsesc unele aspecte glumețe (de exemplu, în ordinea descrescîndă a valenței, profesorul ar corespunde carbonului, asistentul oxigenului iar studentul hidrogenului).

GÎNDIREA PRIN MODELE

Pentru motive care țin de diferența de vîrstă, de gradul diferit de complexitate a fenomenelor studiate și de alte considerente, între diferitele domenii ale științei nu există o aliniere în ceea ce privește nivelul lor de dezvoltare. Decalajele care se creează sînt uneori foarte accentuate. Apare atunci nu numai posibilitatea, dar și necesitatea de a se folosi într-un domeniu unele rezultate și metode din celelalte domenii. Fără îndoială, aici intervine faptul că fenomenele studiate în domenii distincte se află totuși în legătură. De obicei, transferul de metode și rezultate se efectuează dinspre disciplinele mai avansate spre cele mai puțin avansate, dar nici sensul invers nu e interzis, deoarece o disciplină, oricît ar fi de veche, învață mereu din problematica, rezultatele și metodele disciplinelor mai tinere.

Dar cum e posibil un atare transfer de metode, fără a se atenta la personalitatea distinctă pe care fiecare știință a dobîndit-o cu multă trudă, prin

efortul conjugat al multor generații de cercetători? Cum e posibil să aplicăm lumii vii o metodă născută din studiul materiei inerte? Ce relevanță pot avea, în studiul unui fenomen atît de complex cum este societatea umană, conceptele și metodele dezvoltate în cadrul științelor naturii? Cum poate matematica, știință a generalului și exactității, să revendice un rol în cercetarea unor fenomene dominate de situații particulare, empirice, fluctuante? Iată întrebări la care, de vreo două secole, de cînd se accentuează procesul de diferențiere, de specializare tot mai mare a disciplinelor, mulți cercetători au dat un răspuns care invită la o deosebită prudență în folosirea unor transferuri de tipul indicat. Unii, nu puțini, contestă pur și simplu legitimitatea unor astfel de transferuri metodologice. Un exemplu semnificativ: *Mecanica socială*, pe care Spiru Haret o publica la începutul secolului nostru și în care se propunea un transfer de concepte și metode din mecanică în sociologie, a fost primită cu multe rezerve, dacă nu ignorată; a trebuit să treacă peste o jumătate de secol pentru ca valoarea ei de pionierat să fie înțeleasă și recunoscută.

Multă vreme s-a crezut că specificitatea obiectului unei științe reclamă o specificitate corespunzătoare a metodei aplicate acestui obiect. Unii o cred și acum. În ultimele trei decenii, însă, a luat amploare o altă strategie, care se bazează pe transferul de concepte, rezultate și metode între domenii dintre cele mai diferite. În această privință, de o deosebită importanță este metoda modelării. Destul de veche în științele naturii, mai nouă în științele sociale, metoda modelării este, în ultima vreme, atît de supralicitată, în numele ei se revendică atît de mult, încît au devenit necesare unele clarificări,

pentru a nu atribui acestei metode nici mai mult, dar nici mai puțin decît ceea ce i se cuvine.

Problematica din ce în ce mai pretențioasă care se dezvoltă în studiul unui fenomen poate reclama, la un moment dat, metode care nu mai sînt compatibile cu natura fenomenului considerat. Astfel, în studiul unui fenomen empiric *A*, abordat inițial exclusiv prin observație și experiment, se pot acumula atît de multe elemente, încît ele să nu mai poată fi stăpînite fără anumite clarificări conceptuale și fără utilizarea unor procedee speciale de prelucrare a datelor. Sîntem astfel conduși să folosim unele metode logice și de calcul, care reclamă însă din partea obiectului la care ele se aplică o rigoare structurală incompatibilă cu natura unui fenomen empiric. Această contradicție poate fi depășită prin folosirea unui obiect intermediar *B* care satisface exigențele de rigoare menționate și care, în același timp, este analog lui *A*. *Metoda modelării* s-a născut tocmai din astfel de situații în care apare necesitatea de a se studia un obiect *A* prin intermediul altuia *B*, pe care încercăm să-l transformăm într-un *model* al lui *A*. De ce anume depinde această reușită? Mai întîi trebuie să ne asigurăm că *B* satisface o *condiție de adecvare*, în sensul că analogia sa cu *A* este netrivială, că vizează măcar un aspect interesant al lui *A*. Apoi controlăm dacă diferența de natură sau de grad de complexitate dintre *B* și *A* este destul de mare pentru ca ea să asigure existența unor metode aplicabile lui *B*, dar nu și lui *A*. Aceasta este *condiția de eterogeneitate* a modelului față de obiect. Controlăm apoi dacă, printre metodele menționate, există măcar una care conduce, în studiul lui *B*, la rezultate esențial diferite de datele de intrare (ipotezele de plecare) relative la *B*. Progresul datelor de ieșire în raport cu cele de intrare

este o premisă a *eficacității* modelului, a caracterului său netautologic.

Pentru a considera un obiect *B* ca model al altui obiect *A* nu este suficient ca *B* să fie analog cu *A*, eterogen față de *A* și susceptibil de a fi investigat în mod netrivial printr-o metodă inaplicabilă lui *A*. Mai trebuie să impunem o *condiție de relevanță* a lui *B* față de *A*, condiție pe care *B* o satisface în măsura în care rezultatelor obținute în studiul *B* le putem atribui o semnificație, o interpretare, o explicație relativă la *A*. Această capacitate explicativă a lui *B* în raport cu *A* este de fapt finalitatea însăși a procesului de modelare; proprietățile de analogie, de eterogeneitate și de netautologie nu au o valoare epistemologică intrinsecă, ci sînt numai etape în dobîndirea, prin intermediul lui *B*, a unei înțelegeri mai profunde a structurii lui *A*. În ultimă instanță, un model e apreciat în funcție de relevanța sa față de obiect. În sfîrșit, mai trebuie să impunem lui *B* o *condiție de independență*, o anumită *capacitate de autonomizare*, în sensul că el poate abandona calitatea de model al lui *A*, pentru a-și asuma-o pe aceea de model al altui obiect *C*. Să comentăm și să exemplificăm acum cele cinci etape de constituire a unui model (adecvare, eterogeneitate, eficacitate, relevanță și independență) și să urmărim modul în care ele se articulează.

Modelul se dovedește a fi o entitate semiotică, prin aceea că el reprezintă obiectul, i se substituie acestuia. Modelul este un semn motivat, el îndeplinește în raport cu obiectul o funcție iconică (datorită analogiei) și o funcție indicială, de reprezentare aproximativă, parțială (datorită eterogeneității). Modelul matematic al unui fir material de grosime neglijabilă este o curbă rectificabilă (chiar netedă, cu excepția eventuală a unui număr finit de punc-

te). Analogia dintre model și obiect se referă aici la aspectul geometric. Eterogeneitatea rezultă din faptul că, în timp ce modelul e de natură matematică, obiectul este material. Deci, în contrast cu obiectul, modelul e susceptibil de o investigare matematică. Eficacitatea modelului rezultă, de exemplu, din aplicarea teoremei privind reprezentarea lungimii unei curbe sub formă de integrală, de îndată ce curba este suficient de regulată. Corectitudinea rezultatului obținut e condiționată de utilizarea fără greșeală a teoremei menționate și de efectuarea corectă a calculului integralei. Relevanța modelului rezultă din semnificația evidentă a rezultatului obținut: înțelegerea conceptului de lungime a unui fir material și determinarea efectivă a acestei lungimi. Independența modelului e confirmată de posibilitatea de a interpreta integrala respectivă *nu* ca lungime a unui fir material, ci, de exemplu, ca lungime a traiectoriei unui mobil.

Analogia și eterogeneitatea față de obiect conferă modelului o capacitate nelimitată de ameliorare, deci imposibilitatea adecvării sale totale la obiect. Dialectica procesului de modelare trebuie văzută sub forma unui șir infinit de modele care „converge" către obiectul modelat, șir din care nu actualizăm decît un număr finit de termeni. Iată un exemplu elocvent din acest punct de vedere. Primul model, de natură mecanică (sub forma unei structuri planetare analoage sistemului nostru solar) propus de Rutherford (la sfîrșitul secolului trecut) pentru structura atomică permitea explicarea coerentă a unor fenomene fizice și chimice ca electroliza, natura ionilor etc., dar s-a dovedit ulterior nerelevant în raport cu noile descoperiri privind structura atomică. Modelul lui Rutherford a fost înlocuit cu altul mai bun, datorat lui N. Bohr, model care

constă într-o suplimentare a celui dintîi cu anumite legi sintetizatoare, printre care faptul că pentru un sistem atomic închis energia ia un șir discret de valori, diferențele dintre termenii consecutivi din acest șir fiind de ordinul de mărime al constantei lui Planck. Dar și modelul lui Bohr a fost depășit, la rîndul său, de un altul, matematic, propus de W. Heisenberg.

Un alt exemplu semnificativ (de altfel înrudit cu cel de mai sus) pentru modul în care fiecare model este susceptibil de a fi ameliorat, fiind înlocuit cu un altul, avînd o mai mare capacitate explicativă, ne este oferit de evoluția concepțiilor despre sistemul planetar. Modelul geocentric al lui Ptolemeu a fost înlocuit cu cel heliocentric, al lui Copernic. Modelul cinematic circular al acestuia din urmă a fost înlocuit cu modelul cinematic în formă de elipsă al lui Kepler; acesta, la rîndul său, a fost înlocuit de modelul dinamic (deci care ia în considerare și forțele care se află la baza mișcării corpurilor cerești) devenit posibil prin descoperirea de către Newton a legii atracției universale. Dar și în cadrul modelului newtonian rămîneau fenomene care nu puteau fi explicate, în special în ceea ce privește mișcarea planetelor mai apropiate de Soare, ca Mercur, a căror traiectorie se abate de la o elipsă, în sensul că aceasta nu se închide, ci se continuă oarecum în spirală. Astfel de fapte au putut fi explicate în cadrul unui nou model, mai fin, bazat pe teoria relativității a lui Albert Einstein.

Se poate vedea, pe acest exemplu, modul în care modelele succesive ale unui fenomen își pot schimba natura, devin din ce în ce mai complexe, distanța dintre datele de intrare și cele de ieșire crește, dar odată cu aceasta crește și relevanța lor în raport cu fenomenul studiat.

Cele cîteva sute (sau poate mii) de ani de cînd metoda modelării este folosită cu succes în mecanică, în astronomie, în fizică, au transformat această metodă într-o practică obișnuită a cercetării în științele naturii, unde nimeni nu-i mai contestă legitimitatea. Prin modelare, fenomene care scăpau în mare măsură observației directe (ne gîndim atît la fenomenele astronomice, cît și la cele privind structura atomică) au putut totuși beneficia de această metodă, așa cum am arătat în cele precedente. Fenomene empirice au putut intra în albia formalizării, prin modelare și tot prin modelare studiul organismului uman a putut beneficia de metoda experimentală. Astăzi, nu mai știm dacă a șocat vreodată pe cineva asimilarea unei bare materiale cu un segment de dreaptă. Ne putem însă referi la două șocuri mai recente, la care generația actuală a participat. Avem în vedere pătrunderea masivă a modelelor mecanice și fizice în studiul organismelor vii (cu deosebire, sub efectul dezvoltării ciberneticii) și utilizarea unor modele matematice, fizice, chimice sau biologice în studiul fenomenelor sociale. Acestea sînt cele două mari provocări pe care metoda modelării le-a lansat împotriva unei întregi tradiții de cumințenie metodologică. Un exemplu semnificativ îl constituie folosirea entropiei termodinamice ca model al unor fenomene de nedeterminare în procesele de comunicare umană. A luat astfel naștere conceptul de entropie informațională, introdus de Shannon. Unii au protestat, motivînd că informația pe care și-o comunică oamenii nu poate fi redusă la aspectul ei cantitativ. În fapt, acest reducționism nici nu s-a produs. A studia un fenomen A cu ajutorul unui model B nu înseamnă a reduce pe A la B. Din păcate, modelul lui Shannon încă nu a putut fi esențial ameliorat. Dincolo de aspectul ei

cantitativ, dezvăluit de Shannon în urmă cu treizeci de ani, informația își păstrează încă misterul, în ciuda eforturilor deosebite care au asediat-o.

Procesul de modelare este un compromis între obiect și metodă. Metoda, văzîndu-se respinsă de obiect, recurge la un intermediar, prin care ea se întoarce la obiect.

Modelarea are la bază un act de invenție. Un model nu poate fi obținut prin simplă observație, inducție sau generalizare; el trebuie imaginat. De aceea, încercarea de modelare începe cu o ipoteză, o promisiune care numai uneori se convertește într-un model. Față de un Francis Bacon, care preconizează observația și experimentul, sau un Carl von Linné, care elaborează clasificări ale plantelor și animalelor, metoda modelării constituie o îndrăzneală întruchipată în descoperiri care poartă numele unor Kepler, Newton, Einstein, Chomsky, Kleene sau René Thom.

Calitatea de model nu e intrinsecă, ci dobîndită. Aceasta înseamnă că încercarea de a transforma un obiect B într-un model al altui obiect A nu poate fi validată decît *a posteriori*, deci după ce am verificat că el răspunde exigențelor de adecvare, de eterogeneitate, de corectitudine, de netrivialitate, de relevanță și de independență.

Una din marile primejdii care pîndesc procesul de modelare este confuzia — frecventă — dintre adecvare și relevanță. Adecvarea se exprimă printr-o analogie între B și A, în timp ce relevanța rezultă din capacitatea explicativă — în raport cu A — pe care o dobîndesc rezultatele obținute în investigarea lui B. Astfel, un anume tip de graf poate fi adecvat raporturilor de colaborare sau de adversitate, dintre personajele din *Richard al treilea* de Shakespeare, dar nu orice rezultat relativ la acest

graf permite înțelegerea mai profundă a acestor raporturi. Un exemplu de rezultat semnificativ este, aici, posibilitatea de a măsura gradul de echilibru al grafului (F. Harary), relevant pentru starea de echilibru a relațiilor dintre personaje. Un alt exemplu: Structura de limbaj pe un anumit alfabet este adecvată reprezentării sintaxei unui limbaj de programare, dar numai puține rezultate (în special, cele relative la gramatici generative) conduc la rezolvarea unor probleme naturale privind limbajele de programare. Adecvarea e poate, necesară, dar nu și suficientă pentru relevanța unui model.

Mecanismul prin care un rezultat relativ la *B* devine, prin ricoșeu, semnificativ pentru *A*, nu ne este încă suficient de cunoscut. Metodologia cercetării științifice va trebui să aprofundeze tipologia fenomenelor de relevanță a unui model față de obiect, după cum ar fi de dorit să putem evalua după criterii mai riguroase gradul de relevanță al unui model.

GÎNDIREA TRIADICĂ ÎN SEMIOTICĂ

Faptul că Ion oferă Elenei o floare este un exemplu de relație triadică pe care nu o putem reconstitui din relațiile binare subiacente (între Ion și Elena, între Ion și o floare, între o floare și Elena). Într-adevăr, Ion și Elena pot fi într-o relație oarecare (de prietenie, de dragoste etc.), Ion poate renunța la o floare iar Elena poate primi o floare, fără ca toate acestea să însemne că Ion oferă Elenei o floare.

O structură triadică la fel de genuină, de autentică apare în procesul de semioză (adică de naștere a semnelor), așa cum îl vede Ch. S. Peirce. Un *reprezentant* (de exemplu cuvîntul *cîine*) este implicat într-o relație triadică față de o a doua en-

titate, *obiectul* reprezentării (animalul desemnat prin *cîine*), pentru o a treia entitate, numită *interpretant* (sensul cuvîntului *cîine*), relație care dă posibilitatea interpretantului de a intra la rîndul său într-o relație triadică față de același obiect, pentru un alt interpretant. Triada astfel obținută constituie un *semn*. Un semn nu se mulțumește să indice un obiect, ci pretinde să fie interpretat ca atare; el nu este deci posibil fără un interpretant, care mediază între reprezentant și obiect. Reprezentantul nu trimite direct la interpretant, ci îl determină pe acesta prin intermediul (cu ajutorul) obiectului. Există deci o primeitate (*firstness*) atribuită reprezentantului, manifestată prin imediatețea sa (uneori, semnul este asimilat cu reprezentantul), o secondeitate (*secondness*) a obiectului, constînd în realitatea sa, și o terțeitate (*thirdness*) a interpretantului, constînd în natura sa totdeauna abstractă și de mediere între cele două entități anterioare. *Primeitatea* este categoria posibilității; *secondeitatea* este categoria faptului real *in actu*, deci a existenței și a individualității; *terțeitatea* este categoria gîndirii mediatoare și creatoare. Ceea ce-l distinge esențial pe Peirce de ceilalți autori de viziuni triadice (G. Frege, E. Husserl, C. K. Ogden-I. A. Richards etc.) este tocmai această reprezentare categorială căreia îi sînt subordonate toate analizele sale, toate triadele pe care le propune. Numerotarea categoriilor nu se referă la ordinea lor de importanță, ci la ordinea lor în procesul de semioză. În centrul acestui proces se află interpretantul, entitatea cea mai derutantă a semioticii peirce-iene. Prin interpretant, esența semnului constă într-un proces de mediere. Tot datorită interpretantului, un semn nu poate fi conceput izolat, ci numai în cadrul unui sistem de semne. Orice semn pretinde un altul, gene-

rat de interpretantul său. Acest proces recurent dă naștere unui sistem potențial infinit de semne, fără de care nici un semn nu poate fi înțeles în funcționalitatea sa. Interpretantul nu ține de psihologie, ci de logică, deci nu trebuie confundat cu cel care interpretează semnul. Interpretantul nu este o reacție la un semn, ci un constituent al semnului.

Fiecare dintre cele trei componente ale semnului dă naștere la cîte o triadă particulară, proiecție a triadei fundamentale primeitate-secondeitate-terțeitate.

După raporturile semnului cu reprezentantul, distingem: semne-proprietăți (*qualisigns* sau *tones*), cum ar fi semnul *frumos;* semne constînd în apariții-evenimente individuale, cum ar fi *acest cîine,* cu referire la un anume individ al acestei specii într-o anumită apariție a sa (*sinsigns* sau *tokens*); semne care exprimă tipuri generale, cum ar fi cel corespunzător termenului generic de *cîine* (*legisigns* sau *types*). Acestea din urmă se materializează prin replicile lor, cum ar fi, în exemplul dat, diferitele apariții ale cuvîntului *cîine.*

După raporturile cu obiectul, distingem: semne iconice, al căror reprezentant prezintă elemente comune cu obiectul (de exemplu, o fotografie); semne indiciale, manifestate printr-o relație de contiguitate cu obiectul, cum ar fi relația de la efect la cauză, de la parte la întreg etc. (de exemplu, febra ca simptom al gripei); semne simbolice, instituite printr-o lege sau o convenție (cum ar fi semnele de circulație pe drumurile publice). Acestea din urmă se află, în general, într-un raport nemotivat (sau slab motivat) cu obiectul; exemplul cel mai frapant în acest sens îl constituie cuvintele dintr-o limbă naturală.

După raporturile cu interpretantul, distingem: semne rematice, care exprimă o simplă potențialitate (de exemplu, funcțiile propoziționale din logică; o astfel de funcție conține potențial o întreagă clasă de propoziții, dar nici una din ele nu este actualizată); semne informative (*dicisigns*), care exprimă o existență efectivă, o informație relativă la obiect (un exemplu: o propoziție declarativă); semne argumentative, care exprimă un raționament (sub aspect logic, nu psihologic), o regulă, un procedeu general, o lege (exemplu: silogismul).

Cele nouă tipuri de semne — pe care le vom nota, în ordinea în care au fost introduse, cu A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 — mai dau naștere unei triade, formate din: semne autentice (A_1, B_2, C_3); semne degenerate (B_1, C_1, C_2); semne extensive (A_2, A_3, B_3). La un semn degenerat, una din categoriile fundamentale este constrînsă să intre într-un ordin anterior ei (secondeitatea să devină primeitate, terțeitatea să devină primeitate sau secondeitate); la un semn extensiv, dimpotrivă, unele categorii intră într-un ordin superior ordinului lor inițial.

Se poate arăta că dintre cele 27 de clase de semne care rezultă din combinarea celor trei triade relative la reprezentant, la obiect și, respectiv, la interpretant, numai zece sînt valide și anume: semne-proprietăți iconice rematice; trei clase de semne-evenimente individuale; iconice rematice, indiciale rematice și indiciale informative; șase clase de semne-tipuri generale: iconice rematice, indiciale rematice, indiciale informative, simbolice rematice, simbolice informative și simbolice argumentative. Dar și aici numărul trei iese învingător, deoarece cele zece clase pot fi grupate într-un triunghi. Reprezentînd cele zece clase prin pătrate

şi numerotîndu-le cu cifre romane de la I la X, vîrfurile triunghiului vor fi I, IV şi X. Aşezăm pe II şi III între I şi IV, pe V şi VIII între I şi X, pe VII şi IX între IV şi X şi pe VI în centru. Două vîrfuri ale triunghiului nu au elemente comune. Două clase adiacente, situate pe o aceeaşi latură a triunghiului, au două elemente comune, în timp ce oricare alte două clase au cîte un element comun (G. Deledalle, *Théorie et pratique du signe*, Payot, Paris, 1979, p. 84).

A devenit foarte cunoscută şi folosită triada semiotică propusă de Charles Morris (dispărut în urmă cu cîţiva ani): *sintaxă* (studiul relaţiilor dintre semne), *semantică* (raportarea semnelor la obiectele corespunzătoare), *pragmatică* (studiul relaţiilor dintre semne şi utilizatorii lor). Ultimii ani au pus în evidenţă o influenţă tot mai mare a semanticii asupra sintaxei şi a pragmaticii asupra semanticii (un exemplu semnificativ pentru aceste două tipuri de influenţe îl constituie diferitele întrebuinţări ale conjuncţiei *şi*). Dacă multă vreme sintaxa a stat în centrul atenţiei cercetătorilor (fiind uneori considerată drept singura avînd statut de ştiinţă), în timp ce semantica era destul de neglijată iar pragmatica aproape ignorată, în anii din urmă situaţia s-a inversat, semantica marcînd un reviriment încă în deceniul al şaptelea iar pragmatica aflîndu-se într-o ofensivă generală în special în ultimul deceniu. Această stare de lucruri este cu deosebire vizibilă în semiotica lingvistică, în semiotica acţiunii, a literaturii şi artei; dar procesul este prezent şi în semiotica limbajelor ştiinţifice şi a sistemelor cibernetice, unde proliferează studiile semantice (a se vedea, de exemplu, cercetările privind semantica limbajelor de programare) şi este de aşteptat şi un interes mai mare pentru pragmatică.

Mulți autori îl consideră pe Morris un continuator direct al lui Peirce. Probabil că această impresie a fost determinată de faptul că Peirce a inițiat, în urmă cu un secol, pragmatismul, filozofie în care unii au văzut originile... pragmaticii lui Morris. A derutat de asemenea faptul că Morris folosește, ca și Peirce, termenul de *interpretant*. Însă la Morris interpretantul nu este un semn, ca la Peirce (fapt care se află la baza caracterului sistemic, dialectic și paradoxal al semioticii peirce-iene), ci o reacție psihică față de un semn.

Pe măsură ce s-a mers la sursă în cercetarea ideilor lui Peirce (opera sa a fost publicată cu mare întîrziere: Ch. S. Peirce, *Collected papers*, vol. I—VI, Harvard University Press, 1931—1935; vol. VII—VIII, *ibidem*, 1958; corespondența cu Victoria Lady Welby a apărut abia în 1977 la Indiana University Press) s-a înțeles însă că semiotica lui Morris prezintă unele incompatibilități cu aceea a lui Peirce. Într-adevăr, Peirce este interesat exclusiv în procesele de generare, de legitimare și transformare a semnelor (definind, respectiv, trei ramuri ale semioticii: gramatica, logica și retorica), fără nici o referire la procesele mentale privind modul în care semnele sînt percepute și manipulate, în timp ce pentru Morris sînt esențiale acele efecte exercitate asupra noastră prin care unele lucruri devin pentru noi semne. În opoziție cu Peirce, pentru care esențială este situația unui semn în cadrul unui sistem de semne (nici un semn neputînd fi conceput izolat de altele), Morris vede în semn în primul rînd un stimul care determină un anumit comportament. Orientării pragmatice a lui Morris (pentru care pragmatica — văzută ca o teorie a stimulilor și răspunsurilor — este partea centrală a semioticii), i se opune viziunea mai cuprinzătoare a lui Peirce, pentru care

practica semiotică este o activitate mai complexă și mai amplă decît aceea a interacțiunii dintre stimuli și răspunsuri, o activitate care angajează atît modul de funcționare a semnelor cît și relațiile dintre diferite sisteme semiotice (Hanna Buczynska-Garewicz, *Peirce's method of triadic analysis of signs*, Semiotica, vol. 26, no. 3—4, 1979, pp. 253—259). Să mai observăm că, într-o măsură mult mai mare decît concepția lui Morris, gîndirea triadică a lui Peirce nu poate fi despărțită de aceea a lui Hegel, la care Peirce trimite mereu. Primeitatea, secondeitatea și terțeitatea evocă, evident, triada hegeliană a tezei, antitezei și sintezei; dar în abordarea lui Peirce, această triadă hegeliană nu este un mecanism abstract, ci e mereu reconstituită în procesul de analiză funcțională a semnelor cu care natura ne asediază.

GÎNDIREA TRIADICĂ A MATERIEI

Secolul nostru a adus în centrul atenției triada materiei: substanță-energie-informație. După ce teoria relativității a revoluționat ideile noastre despre masă și energie, știința este confruntată cu una dintre cele mai controversate forme de existență și mișcare a materiei: informația. Pe marginea acestei triade a materiei au loc polemici pasionate și la noi în țară (a se vedea lucrările acad. Octav Onicescu și acelea ale lui Valter Roman, Mihai Drăgănescu, Edmond Nicolau, Victor Săhleanu, Virgil Stancovici, Adrian Restian, Dan D. Farcaș și, mai recent, articolul lui Adrian Rogoz, *Interdisciplinaritatea și triada materiei*, în *Interdisciplinaritatea în știința contemporană*, Ed. Politică, București, 1980, pp. 142—156). Întrebările relative la corelația informației cu substanța și cu energia așteaptă încă

răspunsuri revelatoare, de tipul celui (sau în aceeași măsură ca cel) dat de Einstein în legătură cu relația dintre masă și energie. Cultura și învățămîntul se adaptează greu la acest al treilea vîrf al triunghiului — informația, poate și pentru că raporturile sale cu celelalte două sînt încă foarte controversate. Mișcarea ce s-a produs în ultimele decenii de la ingineriile substanțialist-energetice la cele informaționale (S. Marcus, *A primordial domain of the revolution in science and technology; The humanistic engineering,* în volumul *The revolution in science and technology and contemporary social development,* Ed. Academiei R.S.R., București, 1973, pp. 207—219) nu este încă înregistrată în mod corespunzător în învățămîntul tehnic superior (unde, de exemplu, cea mai mare parte a programei de matematică este încă tributară ingineriilor tradiționale) iar în facultățile noastre umanistice ea nu se face încă simțită aproape deloc.

Triada materiei (substanță-energie-informație) constituie un punct de reper pentru o amplă investigație asupra universului biologic, comportamental și social. Avem în vedere cartea de peste o mie de pagini privind sistemele vii, datorată lui James Grier Miller (*Living Systems*, Mc Graw-Hill, New York, 1978). „Această contribuție este unică și va rămîne pentru mult timp în memoria speciei umane" crede unul dintre cei mai importanți economiști contemporani, K. E. Boulding. Miller însuși compară opera sa cu aceea a lui Mendeleev, a cărui tabelă periodică a elementelor a jalonat dezvoltarea ulterioară a chimiei. Care este tabela lui Miller? Ea constă în identificarea a 19 componente (subsisteme) ale sistemelor vii, fiecare dintre aceste componente manifestîndu-se la șapte nivele diferite: celula, organul, organismul, grupul, organiza-

ția, societatea și sistemul supranațional. Cele 19 subsisteme se repartizează în trei grupe.

În prima grupă intră subsistemele în care sînt angajați deopotrivă toți termenii triadei materiei. Distingem aici două subsisteme. Primul este subsistemul de reproducere, capabil să determine apariția și dezvoltarea unor sisteme similare celui inițial. La nivelul celulei, acesta este cromozomul; de fapt, este vorba aici de un subsistem inferior celulei, anume cel al moleculei ADN, înzestrată cu o deosebită capacitate de autoreproducere. La nivelul organizației, reproducerea este asigurată de fondatori, de cei care o înzestrează cu un regulament de funcționare, de cei care contribuie la menținerea și dezvoltarea ei. Sistemul supranațional se reproduce prin organisme corespunzătoare; într-un anume sens, se poate spune că Liga Națiunilor a produs Organizația Națiunilor Unite. Al doilea subsistem din prima grupă asigură delimitarea sistemului de ceea ce se află în afara sa. Pentru celulă avem membrana, pentru organism este pielea, pentru societăți reglementările de frontieră, vamă, pașaport etc.

În a doua grupă se află subsistemele în care prelucrarea informației este absentă sau cade pe planul al doilea, prioritatea fiind acordată celorlalți doi termeni ai triadei materiei. Distingem aici: ingestia (gura, companiile de import etc.); distribuția, menită să repartizeze întregului sistem ceea ce sistemul ingerează (circulația sîngelui, sistemul de transport etc.); subsistemul de convertire, care adaptează cele primite la cerințele sistemului; producția, care creează și repară componentele sistemului și îl asigură cu energie (deosebirea dintre convertire și producție poate fi detectată la nivelul grupului — de exemplu, distincția dintre măcelar și bucătar — și la nivelul societăților — de exemplu, distincția din-

tre o rafinărie de petrol și o fabrică); subsistemul de păstrare (țesuturile grase în organism, casa de economii în unele societăți); subsistemul de producere a datelor de ieșire, fie sub formă de produse (exportul de mărfuri dintr-o societate în alta), fie sub formă de reziduuri; subsistemul motor, care asigură mobilitatea sistemului și a părților sale; subsistemul de suport, care asigură menținerea legăturilor dintre componentele sistemului (de exemplu, scheletul în organism).

În a treia grupă, intră subsistemele dominate de procese de prelucrare a informației. (Pentru Miller, conceptul de informație, cel de al treilea vîrf al triadei materiei, este, în raport cu celelalte concepte introduse în știință în secolul nostru, cel mai important pentru o înțelegere științifică a lumii). Aici intră: subsistemul care transportă informație din exterior în interiorul sistemului (organele de simțuri, agențiile de presă); traducătorul intern, care dă informației aduse de subsistemul precedent o formă capabilă de a fi distribuită în interiorul sistemului; canalul și rețeaua prin care această informație este transmisă în toate părțile sistemului (rețelele de neuroni, telefoanele, poșta); decodificatorul, care traduce informația într-un cod accesibil sistemului (de exemplu, la nivelul societăților, traducerea dintr-o limbă în alta); subsistemul de asociere în configurații durabile a informației primite (aici se află o etapă importantă a procesului de învățare); memoria, care păstrează informația în cadrul sistemului (este de observat că ultimele două subsisteme nu au fost încă identificate la nivelul celulei, al organului și al organismului; în societate, ele revin la diferite instituții de învățămînt, biblioteci etc.); decidentul, care primește date de la toate celelalte subsisteme, le transformă și le transmite ca date de ieșire care

controlează întregul sistem (regulatorul de gene al celulei, cortexul în organism, comitetul de conducere într-o organizație, guvernul într-o societate); codificatorul, care traduce informația internă într-un cod public, care poate fi înțeles de sistemele vecine (hormonii în celulă, limbajul la om, serviciile de informare și propagandă ale unei organizații sau societăți); traducătorul de ieșire, prin care se comunică exteriorului o anumită informație (în primul rînd, informația codificată de subsistemul anterior), de exemplu laringele la om, departamentele de relații cu publicul, în organizații și societăți.

Cele $19 \times 7 = 133$ de tipuri de subsisteme sînt ca tot atîtea sertare pe care știința a încercat să le descuie. Încă nu a reușit la toate. Esențiale pentru sistemele vii sînt nu numai structurile analizate, ci și procesele în care ele sînt angajate și care conferă lumii vii statutul de sistem. Dincolo de marea lor varietate ca natură și complexitate, sistemele vii au în comun cîteva trăsături fundamentale: localizare în spațiu și timp; structuri constînd în combinații cunoscute de molecule organice, incluzînd proteinele; legătură procesuală între nivelele inferioare și cele superioare, acestea din urmă nefiind posibile fără cele dintîi; interacțiune între subsisteme diferite; caracterul de sisteme deschise, cu intrări, prelucrări și ieșiri privind toate cele trei dimensiuni ale triadei materiei. Această triadă epuizează posibilitățile de prelucrare ale oricărui sistem viu.

ALTE ASPECTE ALE GÎNDIRII TRIADICE

Trăim într-un spațiu cu trei dimensiuni, cu alte cuvinte este nevoie de trei valori pentru a caracteriza poziția unui punct în spațiu. Este între acest

spațiu, pe de o parte, și spațiul cu două dimensiuni (planul) și cel cu o singură dimensiune (dreapta), pe de altă parte, o simplă diferență cantitativă sau una mai profundă, de structură? Astăzi se știe că această din urmă variantă este cea reală. S-ar putea crede că, fiindu-ne cel mai familiar din punct de vedere intuitiv, spațiul euclidian cu trei dimensiuni (notat deobicei R^3) se pretează cel mai ușor unui studiu științific. Realitatea este cu totul alta. Familiaritatea intuitivă cu un anumit obiect constituie de multe ori o piedică serioasă în cunoașterea riguroasă a acestuia. Așa se face că, într-o procedare sistematică, se începe cu studiul dreptei, se continuă cu cel al planului și numai după aceea se trece la studiul lui R^3. Diferențe importante de structură apar atît la trecerea de la 1 la 2 cît și în aceea de la 2 la 3. Are sens să se considere spații de dimensiune superioară lui 3? Noțiunea de spațiu cu patru dimensiuni se găsește în germene la Lagrange (secolul XVIII), care, în cercetările sale de mecanică, s-a referit la timp ca la cea de a patra dimensiune, anticipînd astfel spațiul-timp al teoriei relativității. O dezvoltare sistematică a spațiilor cu mai mult de trei dimensiuni este datorată lui Grassman și Cayley (secolul XIX). Ulterior, aceste spații — inclusiv cele cu o infinitate de dimensiuni — s-au dovedit esențiale în fizică, chimie, biologie și economie.

Pentru a arăta cît de surprinzătoare este structura spațiului R^3 în care trăim, ne vom limita la un singur rezultat, cunoscut sub numele de paradoxul lui Banach și Tarski. Să considerăm acele mulțimi A din spațiu care îndeplinesc următoarele două proprietăți:

a) există cel puțin o sferă conținută în A;

b) există cel puțin o sferă (de rază finită) care conține pe A.

Fie două mulțimi B și C cu proprietățile menționate. Paradoxul în discuție (numit așa datorită absenței unui suport intuitiv corespunzător) afirmă că există un număr natural n cu următoarea proprietate: putem descompune pe B în n mulțimi B_1, B_2, ..., B_n și pe C în n mulțimi C_1, C_2, ..., C_n, astfel încît B_1 să fie congruentă cu C_1, B_2 cu C_2, ..., B_n cu C_n.

Rezultatul este atît de surprinzător, încît devine neverosimil. Într-adevăr, B ar putea fi un cub iar C o sferă. În acest caz, evident că B și C nu sînt congruente (deci nu putem lua $n = 1$). Rezultatul de mai sus afirmă însă că B și C pot fi „sparte" într-un același număr de bucăți, astfel încît aceste bucăți să fie, două cîte două, congruente. Numai că aceste bucăți pot avea o structură discontinuă poroasă (ca niște bureți care se întrepătrund), situată dincolo de posibilitățile percepției noastre spațiale obișnuite.

Proprietățile a) și b) impuse mulțimilor B și C sînt satisfăcute de aproape toate corpurile geometrice uzuale: prisma, paralelipipedul, sfera, cubul, tetraedrul, cilindrul, conul, trunchiul de con, piramida. Dacă este mai greu să discutăm aici necesitatea restricției b), putem arăta ușor că în absența proprietății a) paradoxul lui Banach și Tarski dispare. Într-adevăr, în acest caz B ar putea fi formată dintr-un singur punct iar C din exact două puncte; nici o descompunere de tipul celei preconizate nu ar mai putea exista.

Se vorbește uneori despre capacitatea de a vedea în spațiu, atît de necesară, de exemplu, în arhitectură. Paradoxul lui Banach și Tarski, ca și multe alte situații din R^3, arată că această vedere spațială nu este numai a ochiului, ci și a intuiției și a gîn-

dului. Există o intuiție, o gîndire tridimensională, esențial distincte de cele liniare sau bidimensionale.

Un alt spațiu tridimensional al universului nostru cotidian se referă la faptul că vederea omenească normală este tricromatică, în sensul că orice senzație de culoare este o combinație de trei senzații fundamentale: roșu, verde și albastru. Varietatea senzațiilor cromatice rezultă din varietatea intensităților acestor trei senzații fundamentale. Notînd cu x, y și z intensitățile senzațiilor cromatice de roșu, verde și, respectiv, albastru, orice senzație cromatică se reprezintă printr-un punct în spațiul cartezian tridimensional în care abscisa, ordonata și cota corespund, respectiv, lui x, y și z. Însă, spre deosebire de spațiul R^3 în care trăim, unde un punct poate fi situat în oricare dintre cele opt compartimente în care R^3 este împărțit prin cele trei plane de coordante, în spațiul cromatic numai unul dintre aceste opt compartimente poate fi populat, anume cel în care x, y și z sînt nenegative; într-adevăr, intensitatea unei senzații cromatice nu poate fi negativă. Punctul cu toate coordonatele nule corespunde culorii negre (absența totală a luminii). Pentru persoanele care suferă de daltonism, spațiul cromatic nu mai este tridimensional, ci degenerează în unul bidimensional (deobicei nu se realizează distincția dintre roșu și verde) sau, mai rar, într-unul unidimensional (boala cunoscută sub numele de acromatopsie).

Spațiul cromatic tridimensional a devenit obiect de studiu în secolul trecut, prin cercetările lui Helmholtz și Maxwell. Geometria acestui spațiu este importantă atît sub aspect teoretic cît și sub aspect aplicativ (de exemplu, în legătură cu folosirea coloranților în industria textilă). Diferitele figuri geometrice au aici o semnificație cromatică. Segmentul

de dreaptă care unește două culori A și B cuprinde nuanțele de tranziție de la A la B; de exemplu, pe segmentul care unește culoarea albă cu cea roșie se află diferitele nuanțe de roz. Așa cum, variind proporțiile în care amestecăm două culori, obținem segmentul de dreaptă care le admite ca extremități, prin amestecul în diferite proporții a trei culori din spațiul cromatic se obține un triunghi cromatic. Aprecierile calitative privind deosebirile dintre culori devin acum susceptibile de a fi exprimate numeric, cu ajutorul noțiunii de distanță, așa cum este ea studiată în geometria analitică. Există însă un decalaj între valorile acestei distanțe și percepțiile noastre cromatice, deoarece variația de intensitate a unei culori nu este percepută de ochiul nostru în mod continuu, ci abia atunci cînd atinge un anumit grad (prag de separare). Se poate arăta că această structură discontinuă a percepțiilor noastre cromatice conduce, în spațiul cromatic, la o geometrie neeuclidiană specifică; ea descrie reacția ochiului uman la excitația luminoasă.

Numărul 3 exprimă dimensiunea percepției noastre temporale: trecut-prezent-viitor; tot numărul 3 se află ascuns în structurile cele mai intime ale vieții în univers, prin faptul că ereditatea revine la un proces de codificare prin aminoacizi a unor codoni (șiruri de nucleotizi) care au totdeauna lungimea egală cu 3. Într-o exprimare mai metaforică, mai sugestivă, care nu trădează însă natura lucrurilor, putem spune că limbajul eredității are la bază un dicționar în care toate cuvintele revin la secvențe de cîte trei nucleotizi. Descoperirea acestui fapt (în contrast izbitor cu limbile naturale, unde cuvintele au lungimi foarte diferite) a constituit una din marile revelații ale geneticii ultimelor decenii; poate

că în nici un alt domeniu nu s-au acordat atîtea premii Nobel ca în cel al cercetării eredității.

Efortul de a descifra gramatica genetică a pus în evidență rolul important al aspectelor combinatorii, aspecte care devin nebanale de îndată ce sîntem confruntați cu cel puțin trei entități. Celebra problemă a celor n corpuri, din mecanică, este de mult rezolvată pentru $n = 2$; dar continuă să stea în atenția cercetătorilor pentru $n = 3$. (Un caz particular al problemei celor n corpuri este acela al mișcării unei planete în jurul Soarelui; datorită influenței celorlalte planete, această mișcare nu se face în mod riguros pe o elipsă. Determinarea perturbațiilor care intervin în aceste condiții a făcut obiectul celebrei teze de doctorat a lui Spiru Haret).

Un alt exemplu semnificativ al dificultății trecerii de la 2 la 3 îl constituie teoria jocurilor. Metodele elaborate de creatorii acestei teorii pentru jocurile cu doi parteneri nu sînt adecvate jocurilor cu trei parteneri, în legătură cu care însuși conceptul de soluție a trebuit să fie modificat; dar această modificare a fost pusă la rîndul ei sub semnul întrebării pentru jocuri cu cel puțin patru parteneri. Așa se face că jocurile cu trei parteneri — numite triade — s-au constituit într-un capitol relativ independent al teoriei jocurilor. O carte importantă pe această temă a fost publicată, în colaborare, de Mircea Malița (*Triade*, Ed. Științifică, București, 1973), care, în mod semnificativ, situează pe primul loc, în studiul triadelor, noțiunea de *utilitate*. Această noțiune, specifică problemelor de strategie care apar în cadrul grupurilor sociale de indivizi raționali, intervine esențial în studiul comportamentului uman în funcție de preferințele pe care le manifestă indivizii dintr-un grup social. Creatorii teoriei jocurilor și, ulterior, alți autori au propus diferite

descrieri axiomatice ale utilității. Funcția de utilitate indică valorile pe care un partener al unui joc le atribuie diferitelor alternative care-i stau în față.

Studiul triadelor introduce un element esențial nou față de jocurile cu două persoane; apare posibilitatea unei coaliții, în sensul că un jucător se poate coaliza cu un al doilea împotriva celui de al treilea. Iată, după M. D. Davis (*Game theory. A nontechnical introduction*, Basic Books, New York—London, 1970; citat după Malița, *loc. cit.*), două exemple de triade.

Un șef de orchestră comunică unui pianist P, unui saxofonist S și unui ghitarist G dorința de a angaja pe doi dintre ei, în următoarele condiții: G și S pot obține (împreună) 6000 de lei, G și P — 8000 de lei iar S și P — 10 000 de lei. Instrumentiștii angajați își pot împărți banii cum doresc, dar ei trebuie să stabilească modul de împărțire înainte de o posibilă angajare. Primii doi instrumentiști care ajung la un acord urmează să fie angajați.

Complexitatea acestui joc rezultă din dificultatea de a lua în considerare atît suma care va fi primită, cît și modul în care ea va fi împărțită. Tocmai de aceea, ipoteza naturală după care coaliția dintre S și P ar fi cea mai indicată, ei urmînd să primească suma cea mai mare, trebuie considerată cu precauție. Modul în care S și P ar urma să-și împartă suma este influențat de situația fiecăruia dintre ei în raport cu G. Deoarece P are, față de G, o poziție mai puternică decît S față de G, este posibil ca P să pretindă lui S o sumă mai mare decît jumătatea de 5000 de lei a cîștigului lor comun. Dar, în același timp, G, dîndu-și seama că se află în dezavantaj, ar putea încerca să și-l atragă pe P sau pe S, formulînd față de ei pretenții cît mai moderate,

altfel riscînd să nu cîștige nimic. Această acțiune a lui *G* va sabota o posibilă coaliție între *P* și *S*. Aceste considerații sînt suficiente pentru a arăta complexitatea jocului în discuție. Pentru o analiză în continuare a acestui joc ca și a jocului care urmează, a se vedea cartea *Triade*, menționată mai sus.

O altă triadă se referă la trei jucători care pornesc, fiecare, cu cîte un leu. Dacă doi dintre jucători se unesc, formînd o coaliție, ei vor primi încă 9 lei, realizînd deci un total de 11 lei; în aceste condiții, cei trei jucători vor totaliza 12 lei. Se pune problema evoluției acestui joc și a modului de împărțire a banilor între jucători.

Un alt aspect important al combinatoricii rezultînd din interacțiunea a trei persoane (sau grupuri sociale) se referă la gradul de stabilitate (echilibru) a situației unui grup social. Dacă este vorba numai de doi indivizi, este greu de spus care situație este mai stabilă; aceea în care ei se înțeleg sau aceea în care ei se află în dezacord? Oricare dintre aceste două situații poate aluneca în opusa ei, totuși mai stabilă este, deobicei, prima situație. Mai interesant este cazul a trei persoane *A*, *B* și *C*. Dacă relațiile dintre ele sînt, toate, pozitive, există o garanție puternică de stabilitate. Dacă *B* și *C* se află într-o relație pozitivă, dar fiecare dintre ele se află într-o relație negativă cu *A*, situația pare de asemenea stabilă, deoarece *B* și *C* vor fi interesate să-și consolideze înțelegerea, pentru a face față mai ușor adversității lui *A*. Dimpotrivă, dacă relațiile dintre *A*, *B* și *C* sînt toate, negative, se poate presupune că ele nu sînt la fel de negative; aceea dintre ele care este mai puțin negativă, să spunem între *B* și *C*, are deobicei tendința de a se transforma într-o relație pozitivă, pentru a da lui *B* și *C* posibilitatea de a face

altfel riscînd să nu cîștige nimic. Această acțiune a lui *G* va sabota o posibilă coaliție între *P* și *S*. Aceste considerații sînt suficiente pentru a arăta complexitatea jocului în discuție. Pentru o analiză în continuare a acestui joc ca și a jocului care urmează, a se vedea cartea *Triade*, menționată mai sus.

O altă triadă se referă la trei jucători care pornesc, fiecare, cu cîte un leu. Dacă doi dintre jucători se unesc, formînd o coaliție, ei vor primi încă 9 lei, realizînd deci un total de 11 lei; în aceste condiții, cei trei jucători vor totaliza 12 lei. Se pune problema evoluției acestui joc și a modului de împărțire a banilor între jucători.

Un alt aspect important al combinatoricii rezultînd din interacțiunea a trei persoane (sau grupuri sociale) se referă la gradul de stabilitate (echilibru) a situației unui grup social. Dacă este vorba numai de doi indivizi, este greu de spus care situație este mai stabilă; aceea în care ei se înțeleg sau aceea în care ei se află în dezacord? Oricare dintre aceste două situații poate aluneca în opusa ei, totuși mai stabilă este, deobicei, prima situație. Mai interesant este cazul a trei persoane *A*, *B* și *C*. Dacă relațiile dintre ele sînt, toate, pozitive, există o garanție puternică de stabilitate. Dacă *B* și *C* se află într-o relație pozitivă, dar fiecare dintre ele se află într-o relație negativă cu *A*, situația pare de asemenea stabilă, deoarece *B* și *C* vor fi interesate să-și consolideze înțelegerea, pentru a face față mai ușor adversității lui *A*. Dimpotrivă, dacă relațiile dintre *A*, *B* și *C* sînt toate, negative, se poate presupune că ele nu sînt la fel de negative; aceea dintre ele care este mai puțin negativă, să spunem între *B* și *C*, are deobicei tendința de a se transforma într-o relație pozitivă, pentru a da lui *B* și *C* posibilitatea de a face

față, prin colaborare, adversității comune a lui *A*. Avem deci o situație nestabilă. Tot o situație nestabilă apare, deobicei, atunci cînd *B* și *C*, aflate în relație negativă, sînt totuși în relații pozitive cu *A*; în acest caz, este foarte probabil că *A* va folosi situația sa pentru a împăca pe *B* cu *C*.

Se constată că, într-un grup cu trei parteneri, stabilitatea (echilibrul) constă într-un număr impar de relații pozitive, în timp ce instabilitatea se manifestă printr-un număr par de astfel de relații (zero fiind asimilat cu un număr par). Această observație se află la baza teoriei generale a echilibrului social, a deteriorării și ameliorării relațiilor umane, atît în societățile reale cît și în operele de ficțiune (folclor, teatru, roman etc.); se pot consulta, în acest sens, cărțile de teoria grafurilor ale lui Frank Harary; pentru aplicații în teatru, a se vedea revista *Poetics*, vol. 6, nr. 3—4, 1977.

Să nu închidem discuția asupra gîndirii triadice înainte de a menționa încă două manifestări ale ei: situațiile în triunghi, atît de importante în structurile narative și în cele dramatice (a se vedea cartea lui Paul Ginestier, *Le théâtre contemporain dans le monde*, Presses Universitaires de France, Paris, 1961; pentru o prezentare mai succintă, cartea noastră *Poetica matematică*, Ed. Academiei, București, 1970, p. 304) și sistemul triontic al persoanei (eu-tu-el), care se află la baza modelului psihogenetic evolutiv al lui Eduard Pamfil și Doru Ogodescu (a se vedea, de exemplu, cartea lor *Persoană și devenire*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1976).

Alte aspecte ale gîndirii triadice, relative la principiul terțului exclus și la principiul terțului acceptat, au fost discutate în cartea noastră *Paradoxul* (Ed. Albatros, București, 1984; a se vedea în mod special pp. 65—71 și 89—102).

GÎNDIREA TOPOLOGICĂ

Dacă s-ar face un sondaj de popularitate a diferitelor ramuri de matematici moderne printre profesioniștii disciplinelor naturii, tehnicii, omului și societății, este sigur că unul dintre primele locuri ar fi ocupat de teoria grafurilor.

Un graf se obține prin considerarea unei relații binare într-o colecție de obiecte. Legăturile pe calea ferată între diferitele localități ale unei țări definesc deci un graf, după cum tot un graf se obține prin considerarea legăturilor de rudenie pînă la un anume grad între membrii unei colectivități. Obiectele unui graf pot fi deci orașe, indivizi, cuvinte, atomi, numere, neuroni, noțiuni, case, sentimente sau orice alte entități întîlnite sau imaginate, în timp ce relația binară asociată poate avea și ea interpretări dintre cele mai diverse (conexiuni între neuroni, legături chimice între atomi, raporturi de divizibilitate între numere etc.). Obiectele unui graf se reprezintă de obicei prin puncte în plan, iar relația binară prin linii care unesc unele dintre punctele respective.

Prin caracterul relativ elementar și foarte intuitiv, prin faptul că nu se bazează decît într-o mică măsură (cel puțin în unele capitole) pe cunoștințe matematice prealabile, metodele teoriei grafurilor au fost rapid preluate de numeroși specialiști, de la ingineri la artiști, de la economiști la lingviști, de la informaticieni la sociologi. Există astăzi cărți de aplicații ale teoriei grafurilor, diferențiate pe profile: fizică, chimie, economie, sociologie, informatică, lingvistică etc.

Drept părinte al teoriei grafurilor este considerat marele matematician elvețian Leonhard Euler, care și-a propus să răspundă la o întrebare mai ve-

che și anume: este posibil să parcurgi orașul Königsberg (azi Kaliningrad), traversînd cîte o singură dată fiecare pod al orașului? Trebuie să precizăm că prin orașul Königsberg trece rîul Pregel, pe care se află două insule, să le spunem *A* și *B*, legate printr-un pod. În același timp, *A* este legată prin cîte două poduri de fiecare dintre cele două maluri ale rîului, să le spunem *C* și *D*, în timp ce *B* este legată printr-un pod de *C*, iar prin alt pod de *D*. În total sînt deci șapte poduri. Aceasta este faimoasa problemă a podurilor din Königsberg. Este vorba aici de un graf format din obiectele *A*, *B*, *C* și *D*, două obiecte fiind în relație dacă sînt legate direct printr-un pod. Nu e greu de văzut că singurele teritorii care nu-s în relație sînt *C* și *D*. Forma precisă a problemei este următoarea: este posibil ca, pornindu-se dintr-un punct oarecare al grafului (deci din *A*, *B*, *C* sau *D*) să parcurgem fiecare linie a grafului o singură dată, revenind apoi în punctul de plecare? De fapt, Euler și-a pus această problemă într-o formă mai generală; care sînt grafurile în care există un itinerar pornind dintr-un punct, parcurgînd cîte o singură dată fiecare linie a grafului și revenind în punctul de plecare? Răspunsul lui Euler e următorul: un graf admite un astfel de itinerar dacă și numai dacă el este conex (adică din orice punct al grafului se poate ajunge în oricare alt punct al său folosind liniile grafului) și din fiecare punct al grafului pornesc un număr par de linii. Graful asociat podurilor din Königsberg este conex, dar din fiecare punct al său pornesc un număr impar de linii (din *A* pornesc cinci linii, iar din *B*, *C* și *D* cîte trei linii). Deci, un turist care vrea să se plimbe pe toate podurile din Königsberg va trebui, oricît ar fi de grăbit, să parcurgă cel puțin un pod de două ori (în ipo-

teza că plimbarea trebuie încheiată pe același mal sau aceeași insulă, de unde ea a fost începută).

Problema podurilor din Königsberg și soluția dată ei de către Euler au marcat un punct de cotitură în evoluția matematicii spre o știință care nu se mai referă numai la aspectele cantitative, numerice, ci și la cele calitative. Desigur, era de multă vreme clar că geometria, de exemplu, comportă nu numai probleme privind măsurători și calcule numerice, ci și probleme de poziție (*geometria situs*, cum numea Leibniz acest capitol al geometriei), dar în timp ce în studiul aspectelor metrice, cantitative, se înregistrau necontenit progrese, problemele de poziție, calitative, nu-și găseau nici măcar o formulare mai riguroasă. Euler este primul care, prin formularea pe care a reușit s-o dea problemei podurilor din Königsberg, prin extinderea ei la o problemă relativă la orice graf, prin metoda folosită în abordarea problemei și prin soluția obținută a reușit să plaseze problemele de poziție într-un cadru riguros, punînd astfel o piatră de temelie la două discipline, astăzi ajunse la o mare dezvoltare: topologia și teoria grafurilor. Topologia, ramură predominant calitativă a matematicii moderne, pătrunde masiv, în ultima vreme, atît în științele naturii, cît și în cele sociale.

GÎNDIREA ENERGETIC-ENTROPICĂ

Urmărind itinerarele gîndirii științifice și filosofice românești, observăm predilecția pentru anumite teme și motive, luminate mereu din noi și noi unghiuri și mereu cu alte perspective. O asemenea frumoasă obsesie o constituie conceptele de energie și entropie. Tentația de a extinde la întregul cîmp al experienței omenești legea conservării și

transformării energiei și de a privi din acest punct de vedere întreaga problematică a personalității umane apare încă din primul deceniu al secolului nostru la un filozof de talia lui Constantin Rădulescu-Motru, în cadrul unei adevărate doctrine filozofice, cunoscută sub numele de personalism energetic. Desigur, modul în care Rădulescu-Motru extrapolează în domeniul uman relații și restricții ale universului fizic nu este lipsit de simplificări care astăzi ne par naive, dar nu e mai puțin adevărat faptul că ideile sale pot fi reconsiderate astăzi ca transferuri inerente procesului de modelare a psihicului uman. Din acest punct de vedere, cercetările lui Rădulescu-Motru merită o reconsiderare de tipul aceleia pe care Mircea Malița a consacrat-o mecanicii sociale a lui Spiru Haret.

Conceptul de energie evocă însă pe cel de entropie, așa cum ne învață principiul al doilea al termodinamicii. Din modul în care conceptul de entropie a călătorit din termodinamică în teoria informației era firesc să se desprindă întrebarea privind un transfer analog al conceptului de energie (cinetică). Totuși, posibilitatea unei energii informaționale și a unui analog informațional al principiului al doilea al termodinamicii a fost pusă în evidență abia în 1966, de către creatorul școlii românești de teoria probabilităților, profesorul Octav Onicescu. Energia informațională a unui sistem cu mai multe stări este o caracteristică globală a sistemului, definită prin suma pătratelor probabilităților de apariție ale stărilor sistemului. Analogia cu expresia energiei cinetice, care cuprinde pătratele unor viteze, este evidentă. Expresia ca atare a energiei informaționale mai fusese utilizată, cu treizeci de ani înainte de apariția teoriei informației, de către un italian, Corrado Gini, fără însă a-i sesiza

profundele sale semnificații. În cei 13 ani de la apariție, conceptul de energie informațională a fost utilizat în nenumărate domenii, ca economia, lingvistica, psihologia, pedagogia, demografia și poetica. Cum se explică acest succes? Energia informațională are o semnificație intuitivă conformă cu denumirea ei și, în același timp, se calculează ușor și este legată printr-o relație simplă cu entropia: cînd una din ele crește, cealaltă descrește. Este deci suficient să stabilim sensul de variație al energiei pentru a deduce pe cel al entropiei. Avantajul este evident, deoarece este mult mai ușor să se evalueze energia decît entropia (aceasta din urmă comportînd calcule de logaritmi).

Însă energia informațională nu e decît un caz particular al unui parametru mai complex, corelația informațională, al cărei autor este tot Octav Onicescu. Corelația informațională a două populații exprimă gradul în care ele au proprietăți comune, iar corelația unei populații cu ea însăși este tocmai energia ei informațională. Octav Onicescu a publicat (în colaborare cu Vasile Ștefănescu) o monografie de sinteză privind acești parametri informaționali (*Elemente de statistică informațională cu aplicații*, Ed. Tehnică, București, 1979), dar cartea nu reușește să dea decît o imagine parțială a impactului pe care parametrii informaționali introduși de Onicescu îl au asupra cercetării științifice actuale. Astfel, pentru a da numai trei exemple, ne vom referi la lucrarea monografică a lui Luciano di Sopra, *Teoria duale del processo urbano. Energia informazionale e teoria urbanistica* (Quaderni della Rivista Urbanistica, Edizioni Urbanistica, Torino, 1968), la cercetările lui I. Voinescu și ale altor neurologi privind utilizarea parametrilor informaționali în studiul

afaziei și la utilizarea de către Ion Rădoi a energiei și corelației informaționale în studiul comparativ al variantelor baladei *Meșterul Manole* (în *Sémiotique formelle du folklore*, București-Paris, 1978), toate omise în monografia publicată de Editura Tehnică.

Cel puțin două nume mai trebuie aduse în discuție în ordinea de idei pe care o avem în vedere. Un fost student al profesorului Onicescu, N. Georgescu-Roegen, avea să se orienteze spre științele economice, atrăgînd atenția lumii prin originalitatea ideilor sale, sintetizate în *The entropy law and the economic process* (publicată în românește la Ed. Politică) și în *Energy and economic myths*. Pentru Georgescu-Roegen, procesul economic este o continuare a evoluției biologice și comportă o interpretare biologică, în cadrul căreia este esențial faptul că lucrurile își pot schimba nu numai locul ci și calitatea, iar schimbarea nu se poate face decît înainte. Cercetînd interpretarea probabilistă a termodinamicii (o critică în același sens a fost dezvoltată de laureatul premiului Nobel, Ilya Prigogine), Georgescu-Roegen dezvoltă printre primii o concepție a dezvoltării economice cu largă deschidere spre problemele mediului înconjurător, în perfectă concordanță cu viziunea sa bioeconomică.

O gîndire asemănătoare, aplicată însă altei clase de fenomene, întîlnim la Stéphane Lupasco, preocupat în lucrări ca *Le principe d'antagonisme et la logique de l'énergie, L'énergie et la matière vivante, La tragédie de l'énergie* și *L'énergie et la matière psychique* (Julliard, Paris, 1974) de conexiunile vieții psihice cu lumea fizică și biologică, sub semnul paradigmei atotcuprinzătoare a energiei. În sfîrșit, să mai amintim pe Gheorghe Zapan, cu importante aplicații ale ideii de entropie în psihologie.

GÎNDIREA IPOTETICĂ ȘI COMBINATORIE

Ar fi greu de găsit un tip de mesaj mai popular și mai frecvent decît zîmbetul. El este faza preliminară a multora din actele noastre de comunicare verbală, el acompaniază deseori această comunicare, după cum tot el este semnalul de încheiere a unui act de comunicare și de despărțire. Vorbele bune se preling în tăcere prin zîmbet, după cum tot prin zîmbet ele se declanșează. Cuvintele capătă adeseori sensul lor exact după modul în care sînt subliniate prin zîmbet, sau prin absența zîmbetului. Zîmbetul ne salvează atunci cînd vorbele devin neputincioase, acțiunea lui se aseamănă cu aceea a muzicii, amîndouă implicînd o polisemie infinită. Contactul cu un străin a cărui limbă îți este necunoscută sau cu un copil care încă nu e în stare să articuleze cuvintele se realizează de cele mai multe ori printr-un zîmbet. În teoria comunicării se vorbește despre funcția fatică, prin intermediul căreia stabilim, menținem și controlăm contactul cu interlocutorul. Cît de importantă a devenit această funcție azi, cînd planeta noastră se face parcă din ce în ce mai mică iar nevoia noastră de solidaritate devine din ce în ce mai mare! Priviți la oamenii de stat care, încărcați de mari și grave răspunderi sociale, se întîlnesc pentru tratative! Zîmbetul lor rezumă speranțele noastre.

Nu e însă mai puțin adevărat că zîmbetul a devenit atît de social, încît s-a transformat, pentru mulți oameni, într-o obligație profesională. Uneori, ca în cele mai multe saluturi, atît zîmbetul cît și absența lui sînt semnificative, dar în moduri diferite. Zîmbetul poate deveni o rutină, dar această rutină este de multe ori necesară, avem nevoie de ea, fapt

de care ne convingem de îndată ce zîmbetul devine absent.

Un antropolog american a relatat modul în care a testat valoarea cuvintelor pe care le rostim cînd salutăm pe cineva. Timp de o zi a adresat fiecărei cunoștințe pe care o întîlnea cuvintele *you are stupid* (ești un prost), însoțite însă de un zîmbet foarte afabil. Toți interlocutorii au reacționat ca la un salut normal. Încercați însă să spuneți *bună ziua* cu un aer morocănos; este foarte probabil că interlocutorul vă va considera într-o proastă dispoziție sau vă va suspecta că... aveți ceva cu el.

Ca orice atitudine suprasolicitată, zîmbetul poate avea un efect opus celui scontat. Condițiile din ce în ce mai complicate ale relațiilor sociale conferă celor mai simple atitudini umane o varietate practic infinită de posibilități și implicații. Este adevărat, acea mișcare uneori abia perceptibilă a buzelor, a ochilor, a feței, pe care o numim zîmbet, ne rămîne cel mai frumos semn al nesingurătății noastre. Dar nu e mai puțin adevărat, din păcate, că nici acest semn nu se poate sustrage acțiunii, pe cît de lente, pe atît de necruțătoare, pe care o exercită asupra fiecărui om imensa lipsă de încredere acumulată de omenire. Zîmbetul față în față cu suspiciunea, zîmbetul sabotat de suspiciune, iată drama atîtor întîlniri încărcate cu o gravă răspundere privind destinele unor uriașe mase de oameni.

Într-un articol recent (*Facial signs: Facts, Fantasies and Possibilities*, publicat în culegerea *Sight, Sound and Sense*, editor Th. A. Sebeok, Indiana University Press, 1978, pp. 124—156), Paul Ekman distinge 21 de tipuri de trăsături faciale, pe care le repartizează în trei grupe ,după cum ele sînt statice, mobile dar lente sau rapide. Astfel, structura osoasă este statică, pigmentația pielei este parțial

statică, parțial lentă, dentiția se modifică lent, ca și ridurile feței și întregul relief al ei, dar temperatura, culoarea, poziția feței se pot modifica rapid. La realizarea zîmbetului participă atît trăsăturile lente cît și cele rapide, dar anatomia sa este complicată și de o mare varietate, pe care nu o putem analiza aici.

Ekman distinge 18 tipuri de informații pe care le poate furniza fața omenească, dar zîmbetul pare să fie un vector care-și are componente în toate aceste 18 coordonate (printre care temperamentul, inteligența, emoția, dispoziția, vîrsta, starea sănătății). Spre deosebire de rîs, care cu greu poate fi confundat cu absența rîsului, trecerea de la zîmbet la absența zîmbetului este graduală. Totuși, putem încerca o cuantificare a ipostazelor zîmbetului, dar nu sub aspect anatomic, ci din punctul de vedere al funcțiilor sale semiotice. În acest scop, să ne imaginăm mai întîi o persoană care zîmbește de una singură, deci în absența oricărui partener uman. O atare persoană ar putea zîmbi, de exemplu, în largul unei cîmpii, sau între cei patru pereți ai unei odăi. Zîmbetul ar putea fi neconștient sau conștient, în acest din urmă caz putînd fi neintenționat (deci spontan, putîndu-se chiar transforma în rîs) sau intenționat (de exemplu cînd ne privim în oglindă pentru a ne verifica). Fiecare dintre aceste trei tipuri de zîmbet (neconștient; conștient, dar neintenționat; conștient și intenționat) este susceptibil de diferite valori semiotice, dintre care cel puțin două pot fi precizate: zîmbetul poate fi semn al unei stări de bucurie sau cel puțin de bună dispoziție, după cum el poate fi un zîmbet amar. Apar astfel cel puțin șase ipostaze distincte ale zîmbetului.

Există cel puțin patru semnificații pe care le poate avea zîmbetul în prezența unui partener;

bună dispoziție (satisfacție); amărăciune (de care, eventual, ne distanțăm cu oarecare umor); simpatie la adresa partenerului; ironie la adresa partenerului. În timp ce primele două pot să apară și în absența unui partener, ultimele două îl implică. În teoria actelor de limbaj (datorată lui John L. Austin, *How to do things with words*, Oxford University Press, 1962 și continuată de numeroși cercetători) se distinge între realizarea propriu-zisă a unui mesaj (așa-numitul act locuționar), scopul avut în vedere de emițător și atitudinea față de receptorul mesajului (scopul și atitudinea alcătuiesc așa-numitul *act ilocuționar*) și influența pe care emițătorul o exercită, prin mesajul emis, asupra receptorului (așa-numitul *act perlocuționar*). Aceste distincții pot fi extinse și la comunicarea neverbală, în particular la comunicarea prin zîmbet, cu unele modificări de nuanțe și detalii pe care nu le vom mai discuta aici. Dintre cele patru tipuri de zîmbet considerate mai sus, ultimele două au un pronunțat caracter ilocuționar (la care se poate, eventual, adăuga și unul perlocuționar), în timp ce la primele două forța ilocuționară este mai redusă. În cadrul actelor ilocuționare și perlocuționare regăsim așa-numita funcție conativă a comunicării, prin care Roman Jakobson numea orientarea spre receptor a procesului de comunicare. Să mai amintim, în această ordine de idei, distincția care se face în semiotică între semn și semnal („Cînd un semn declanșează, mecanic sau în virtutea unei convenții, o anumită reacție din partea celui care-l primește, se spune că semnul funcționează ca un semnal", Th. A. Sebeok, *Six species of signs*, Semiotica, vol. 13, no. 3, 1975, pp. 233—260). Studiul transformării semnelor în semnale are un rol fundamental în înțelegerea actelor perlocuționare. În particular, ne vor interesa condițiile în

care zîmbetul se transformă din semn în semnal. (Să mai observăm, în treacăt, că termenul *semnal* este utilizat în teoria informației într-o accepțiune diferită de aceea din semiotică, semnalul fiind, pentru Shannon, orice semn purtător de informație).

Cele patru semnificații posibile ale zîmbetului pot, eventual, să se combine în diferite moduri. Zîmbetul poate fi, în același timp, expresia unei bucurii (bune dispoziții) și a unei simpatii față de partener; el poate să fie colorat de amărăciune, dar orientat cu simpatie către partener; sau să exprime buna dispoziție dar, în același timp, să fie orientat în mod ironic către partener. Apar și combinații incompatibile, cum ar fi aceea a suprapunerii zîmbetului amar cu cel care exprimă o stare de satisfacție. Admițînd drept combinații compatibile exact cele trei combinații enumerate mai sus, rezultă un total de șapte semnificații posibile ale zîmbetului. Însă fiecare dintre aceste șapte semnificații poate fi asociată cu una sau alta dintre următoarele atitudini sau poziții ale subiectului: neconștient; conștient dar neintenționat; conștient și intenționat, dar simulat; conștient, intenționat și nesimulat. Rezultă un total de $7 \times 4 = 28$ de variante ale zîmbetului. Există însă și posibilitatea zîmbetului strict interior, care deci nu se exteriorizează într-o mișcare perceptibilă vizual. Zîmbetul poate fi cenzurat din motive diverse, care țin fie de natura situației (nimeni nu va zîmbi la o ceremonie funebră), fie de distanța care ne separă de interlocutor sau de dorința de a simula absența zîmbetului sau chiar atitudinea opusă, premergătoare plînsului. Cu aceste observații, gama modalităților zîmbetului se lărgește, comportînd următoarele șase tipuri: neexprimat și inexistent; neexprimat, dar existent sub forma zîmbetului interior; exprimat, dar neconștient; expri-

mat conștient, dar neintenționat; exprimat conștient și intenționat, dar nesimulat; simulat. Cu excepția primei modalități, fiecare dintre modalitățile puse în evidență poate avea oricare dintre cele șapte valori semantice (simple sau multiple) descrise mai sus. Rezultă $5 \times 7 = 35$ de variante în care se poate produce zîmbetul.

Evident, modul de a cuantifica ipostazele sau valorile zîmbetului poate fi discutat și, eventual, revizuit în funcție de bogata literatură psihologică relativă la această atitudine umană. Dar astfel de modificări ar influența numai cantitativ, nu și structural analiza noastră. Nu ignorăm nuanțele care se pierd prin adoptarea unor simplificări de tipul celor pe care le preconizăm (unde se încadrează, în clasificarea noastră, surîsul Giocondei? dar cel al Hiroșimei?). Vom vedea însă că, chiar în ipoteza simplificatoare adoptată, tipologia zîmbetului capătă o complexitate neașteptată, de îndată ce ne preocupă reacția partenerului.

Dacă, așa cum am văzut, un zîmbet poate fi produs în 35 de feluri, înseamnă că el poate să fie și decodat în 35 de variante distincte. Caracterul atît de labil al stărilor subiacente zîmbetului, trecerea atît de gradată de la zîmbet la atitudinea neutră și invers, de la un tip de zîmbet la altul, precum și atitudinea de ezitare, uneori chiar de suspiciune, pe care o adoptă de obicei partenerul fac ca oricare dintre cele 36 de variante (pentru că adăugăm și varianta corespunzătoare absenței zîmbetului, atît ca expresie, cît și interior) să poată fi sau decodată corect sau confundată cu oricare dintre celelalte 35 de variante. Rezultă $36 \times 36 = 1296$ relații posibile între codificarea și decodificarea unui zîmbet, altfel spus 1296 moduri în care zîmbetul adresat unui partener se poate combina cu zîmbetul pe care acesta

îl receptează. Dintre acestea, numai 36 de raporturi (adică asocierea oricărei variante cu ea însăși) exprimă concordanța între intenția unuia dintre parteneri și interpretarea ei de către celălalt partener. Celelalte 1260 de variante sînt manifestări a tot atîtea situări ale partenerilor pe lungimi de undă diferite.

Am analizat deci, într-o primă etapă, o semiotică de ordinul întîi, a persoanei singure, apoi o semiotică de ordinul al doilea, a unei persoane care zîmbește în prezența unui partener. A urmat o semiotică de ordinul al treilea, aceea în care ne-am interesat de modul în care partenerul decodează zîmbetul. O semiotică de ordinul al patrulea ar putea fi aceea în care ne interesăm de răspunsul partenerului. Acest răspuns ar putea fi oricare dintre cele 35 de variante puse în evidență în atitudinea primei persoane, plus eventual o a 36-a variantă, constînd în absența zîmbetului (atît interior cît și exterior). Dar, exact ca în analiza precedentă, oricare dintre cele 1296 de raporturi posibile în cadrul semioticii de ordinul al treilea se poate combina cu oricare dintre cele 36 de răspunsuri. Obținem astfel o tipologie de situații numărînd $1296 \times 36 = 46\,656$ de variante.

Într-o semiotică de ordinul al cincilea, vom lua în considerare modul în care prima persoană decodează zîmbetul (sau nonzîmbetul) de răspuns al partenerului. Fiecare dintre cele 36 de răspunsuri poate fi decodat în 36 de feluri, deci obținem $36 \times 36 = 1296$ raporturi posibile între răspunsul partenerului și decodarea acestui răspuns. Dar semiotica de ordinul al cincilea trebuie, evident, să țină seamă de semioticile precedente; fiecare dintre raporturile pe care tocmai le-am pus în evidență poate urma oricăruia dintre raporturile care au apărut în

cadrul semioticii de ordinul al treilea. Obținem deci $1296 \times 1296 = 1\,679\,616$ de variante.

Semioticile de ordin superior lui cinci ar fi acelea în care emițătorul face o ipoteză asupra modului în care receptorul i-a decodat mesajul, apoi receptorul face o ipoteză asupra acestei ipoteze, același receptor face o ipoteză asupra modului în care emițătorul i-a decodat răspunsul, emițătorul face o ipoteză asupra acestei ipoteze și așa mai departe. Ordinul de mărime al numărului de variante care se acumulează în acest fel crește vertiginos.

Și totuși, actul de comunicare pe care-l avem în vedere este unul dintre cele mai rudimentare: un schimb de zîmbete între doi parteneri. Dar fiecare dintre parteneri are, ca la șah, o anumită putere de analiză, adică de utilizare a semioticilor de ordin superior, și elaborează o ipoteză asupra capacității corespunzătoare a partenerului. Această capacitate se exprimă printr-un număr natural, care indică semiotica de ordinul cel mai înalt pînă la care o persoană poate urca. Teoretic, în planul competenței umane, această capacitate este infinită. În planul performanței, însă, experimente adecvate sau poate mai degrabă radiografia riguroasă a unor situații autentice ar putea stabili, măcar aproximativ, capacitatea efectivă de analiză pe care o manifestă o persoană. Este ușor de înțeles, în aceste condiții, cîte greșeli, drame, prejudicii, gafe, complicații inutile pot să apară dintr-o inexactă evaluare de către un partener a capacității de analiză a celuilalt partener; într-adevăr, semioticile de ordin superior nu se referă numai la comunicarea prin zîmbet, ci la orice comunicare umană (a se vedea, de exemplu, schița „C.F.R." de I. L. Caragiale).

GÎNDIREA INFINITĂȚII

Cîte puncte sînt pe o dreaptă? Cîte puncte sînt într-un plan? Cîte numere sînt în șirul 1, 2, ..., n, ...? Cîte submulțimi conține intervalul (0, 1)? Cîte funcții derivabile există? Cîte fraze există în limba română? Cîte numere raționale există? Cîte funcții reale de o variabilă reală există?

Toate aceste întrebări admit un răspuns comun: O infinitate. Totuși, noi simțim că această infinitate nu este de fiecare dată aceeași; există „infinități mai mari" și „infinități mai mici". Cum anume am putea compara diferitele infinități care apar în natură, cum am putea introduce niște „numere infinite", care să continue, să prelungească șirul numerelor naturale 1, 2, 3, ..., n, ...? La această întrebare a reușit să răspundă, în urmă cu vreo 100 de ani, matematicianul german Georg Cantor, creatorul teoriei mulțimilor, teorie care stă la baza matematicii moderne.

Pînă la Georg Cantor, părintele infinitului matematic, omenirea era la fel de ignorantă în fața infinitului matematic cum trebuie să fi fost într-un trecut îndepărtat în fața pluralității matematice, atunci cînd oamenii nu puteau distinge decît între „unu" și „mai mulți".

Modul în care Cantor a rezolvat problema „numărării infinitului" este deosebit de instructiv și caracteristic pentru multe descoperiri matematice.

Georg Cantor a căutat soluția problemei chiar în modul în care se introduc numerele naturale. El era convins că dacă le înțelegem bine pe acestea, dacă reușim să clarificăm procesul prin care ele se introduc, atunci chiar acest proces ne va furniza și calea pe care să introducem „numere infinite".

Cum se introduce numărul natural 4? El este rezultatul unui dublu proces de abstractizare la care sînt supuse mulțimi de obiecte dintre cele mai variate dar care au proprietatea că pot fi puse într-o corespondență specială, așa-numita corespondență biunivocă. De exemplu, dacă a, b, c, d sînt numere, iar a', b', c' și d' sînt creioane, putem realiza corespondența $a \leftrightarrow a'$, $b \leftrightarrow b'$, $c \leftrightarrow c'$, $d \leftrightarrow d'$, care este o corespondență biunivocă între mulțimile $A = \{a, b, c, d\}$ și $B = \{a', b', c', d'\}$. Iată cum se prezintă, sub forma ei generală, noțiunea de corespondență biunivocă.

Ce înseamnă că două mulțimi au același număr de elemente?

Fie două mulțimi A și B. Fie f o aplicație a lui A în B, adică o regulă care asociază fiecărui element din A un element unic din B. Aplicația f constituie o *injecție* dacă pentru orice pereche de elemente distincte x și y din mulțimea A elementele $f(x)$ și $f(y)$ sînt de asemenea distincte. Aplicația f constituie o *surjecție* dacă pentru orice element b din B există un element a din A pentru care $f(a) = b$. De exemplu, dacă $A = \{a, b, c, d\}$ și $C = \{a', b', c', d', e'\}$, aplicația care asociază lui a pe b', lui b pe c', lui c pe d' și lui d pe e' este o injecție fără a fi o surjecție, deoarece a' nu corespunde nici unui element din A. Dacă însă punem $D = \{b', c', d', e'\}$, regula de corespondență de mai sus definește o aplicație a lui A în D care este și injecție, și surjecție.

O aplicație f a lui A în B care este și injecție și surjecție constituie, prin definiție, o *bijecție* a lui A pe B. Mulțimile A și B se spune că sînt, în acest caz, *echipotente*; două mulțimi A și B se numesc, deci, echipotente, dacă există o bijecție a mulțimii A pe mulțimea B.

Cititorii își pot propune să arate că mulțimile $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sînt echipotente, în timp ce mulțimile $A' = \{a, b, c\}$ și $B' = \{1, 2\}$ nu sînt echipotente.

Nu este greu de văzut că relația de echipotență între mulțimi este o relație *reflexivă* (orice mulțime este echipotentă cu ea însăși), *simetrică* (dacă mulțimea A este echipotentă cu mulțimea B, atunci și B este echipotentă cu A) și *tranzitivă* (dacă A este echipotentă cu B iar B este echipotentă cu C, atunci A este echipotentă cu C). Cititorii pot verifica singuri aceste proprietăți, care decurg din însăși definiția noțiunii de bijecție.

O relație reflexivă, simetrică și tranzitivă este, prin definiție, o *relație de echivalență*. Relația de echipotență este deci o relație de echivalență. Față de relația de echipotență, mulțimile se repartizează în *clase de echipotență;* clasa de echipotență a mulțimii A este alcătuită din toate mulțimile care sînt echipotente cu mulțimea A. Cititorii pot verifica faptul că două clase distincte de echipotență nu pot avea elemente comune; cu alte cuvinte, fiecare mulțime aparține unei clase de echipotență și numai uneia. Despre două mulțimi echipotente se mai spune că sînt în corespondență biunivocă.

Acum putem privi numerele naturale dintr-un punct de vedere nou ; ele sînt clasele de echipotență ale mulțimilor finite. Două mulțimi echipotente pot să difere fie prin natura elementelor (de exemplu, mulțimile $\{a, b, c\}$ și $\{1, 2, 3\}$, fie prin ordinea lor (de exemplu, mulțimile $\{a, b, c\}$ și $\{b, a, c\}$. Ceea ce este comun mulțimilor aparținînd aceleiași clase de echipotență este deci exact ceea ce rămîne după ce am făcut abstracție atît de natura elementelor cît și de ordinea lor. Altfel spus, o clasă de echipo-

tență strînge laolaltă acele mulțimi între care nu putem distinge decît recurgînd la natura elementelor lor sau la ordinea în care aceste elemente sînt așezate.

S-ar părea că metoda claselor de echipotență ne menține pe loc, la ceea ce știam dinainte, și nu ne face să progresăm în problema care ne interesează. Așa se întîmplă de multe ori în matematică; observația care declanșează o descoperire interesantă are o aparență banală și puțini sînt cei care au prospețimea de gîndire necesară pentru a vedea în ce fel această observație ascunde soluția problemei. Cantor a observat că relația de echipotență are sens nu numai între mulțimi finite, ci și între orice mulțimi, deci, în particular, și între mulțimi infinite. Tocmai acest fapt i-a permis să introducă o generalizare a noțiunii de număr natural, sub forma următoare: Se numește *număr cardinal orice clasă de mulțimi echipotente*. În cazul particular în care o mulțime este finită, clasa ei de echipotență definește un număr *cardinal finit,* care poate fi identificat cu numărul elementelor care alcătuiesc mulțimea. În cazul în care mulțimea considerată este infinită, clasa ei de echipotență definește un număr *cardinal transfinit;* este tocmai noțiunea pe care o așteptăm și care ne permite „să numărăm infinitul".

Pentru ca noțiunea de număr cardinal introdusă mai sus să poată fi acceptată și să prezinte interes, trebuie verificat mai întîi că orice mulțime are un număr cardinal unic. Această proprietate rezultă din faptul, remarcat mai sus, că fiecare mulțime aparține unei singure clase de echipotență. Dar aceasta nu este suficient. Mai trebuie să putem defini, pentru noile numere, anumite operații care să aibă un rezultat bine determinat și care să se reducă, în

cazul numerelor cardinale finite, la operațiile obișnuite cu numere naturale. Ne vom mărgini, în cele ce urmează, doar la două dintre aceste operații, care sînt dealtfel și cele mai importante: *adunarea* și *produsul* numerelor cardinale.

Fie a și b două numere cardinale; fie A o mulțime aparținînd lui a și B o mulțime aparținînd lui b, astfel încît A și B să nu aibă elemente comune. Prin definiție, suma dintre a și b, notată $a + b$, este clasa de echipotență a mulțimii $A \cup B$. (Precauția ca mulțimile A și B să nu aibă elemente comune este necesară, după cum rezultă din următorul exemplu: $A = \{a, b\}$, $B = \{b\}$, însă clasa de echipotență a lui $A \cup B$ nu definește numărul 3, așa cum era de așteptat, ci numărul 2).

Lăsăm cititorului, ca exercițiu, să verifice că suma a două numere cardinale este bine determinată și că se reduce la adunarea obișnuită atunci cînd a și b sînt numere cardinale finite.

Produsul a două numere cardinale a și b se definește în felul următor: fiind date o mulțime A aparținînd lui a și o mulțime B aparținînd lui b (de astă dată nu mai punem condiția ca A și B să nu aibă elemente comune), produsul dintre a și b, notat ab, este clasa de echipotență a mulțimii tuturor perechilor ordonate de forma $<x, y>$, unde x este un element din A iar y este un element din B. Se verifică ușor (exercițiu) că produsul a două numere cardinale este unic determinat și se reduce, în cazul numerelor cardinale finite, la înmulțirea obișnuită.

Să discutăm acum cîteva exemple de numere cardinale transfinite.

Clasa de echipotență a mulțimii N a numerelor naturale constituie numărul cardinal al mulțimilor

numărabile (adică echipotente cu N). O mulțime echipotentă cu N este, prin definiție, o mulțime numărabilă.

Nu este greu de demonstrat că mulțimea Q^+ a numerelor raționale pozitive este numărabilă. Într-adevăr, să formăm cu elementele lui Q^+ un tablou pe linii și coloane în așa fel încît pe linia de rang p a tabloului să figureze toate numerele raționale pozitive pentru care suma dintre numărător și numitor este egală cu p (bineînțeles, nu vom insera în tablou decît fracțiile ireductibile).

Vom asocia lui 1 pe 0, lui 2 pe 1, lui 3 pe $\frac{1}{2}$, lui 4 pe 2, lui 5 pe 3, lui 6 pe $\frac{1}{3}$, lui 7 pe $\frac{1}{4}$, lui 8 pe $\frac{2}{3}$, lui 9 pe $\frac{3}{2}$, lui 10 pe 4 ș.a.m.d. Realizăm astfel o bijecție a lui N pe Q^+, ceea ce arată că Q^+ este numărabilă. Însă mulțimea Q^- a numerelor raționale negative este echipotentă cu Q^+ (exercițiu) iar reuniunea a două mulțimi numărabile este tot o mulțime numărabilă (exercițiu). Rezultă că mulțimea Q a numerelor raționale este numărabilă. Putem deci spune că am precizat răspunsul la două dintre întrebările puse la începutul acestui paragraf.

Cititorul poate verifica singur că același răspuns este valabil și pentru mulțimea frazelor din limba română; ea este numărabilă. Iată o indicație pentru demonstrarea acestui fapt. Notînd cu V vocabularul (finit) al limbii române, o frază din limba română este un șir finit de elemente din V, deci este de forma $a_1 a_2 \ldots a_n$, unde $a_i \in V$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Numărul n se numește lungimea frazei. Observăm că, notînd cu F_n mulțimea frazelor românești de

lungime egală cu n, fiecare mulțime F_n este finită și nevidă (deoarece, cel puțin în principiu, putem forma fraze oricît de lungi). Este suficient acum să formăm un tablou pe linii și coloane, în care linia a n-a să fie ocupată de elementele din F_n. De aici mai departe, raționamentul urmează calea pe care s-a stabilit că Q este numărabilă. Rezultă că mulțimea F a frazelor din limba română este numărabilă.

Numărul cardinal al unei mulțimi se mai numește și puterea acelei mulțimi. Puterea numărabilului, cu care am luat cunoștință mai sus, este cel mai mic număr cardinal transfinit, în sensul că orice mulțime infinită conține o submulțime numărabilă (dar demonstrația acestui rezultat angajează un fapt delicat, legat de așa-numita axiomă a alegerii, pe care nu o putem discuta aici). În general, un număr cardinal a este mai mic sau egal cu un număr cardinal b (se scrie $a \leqslant b$) dacă orice mulțime de cardinal b conține o submulțime de cardinal a. Puterea numărabilului este, față de celelalte numere cardinale transfinite, în situația în care se află „0" față de numerele naturale; el este de efect nul în operația de adunare cu numere cardinale transfinite; cu alte cuvinte, reuniunea dintre o mulțime infinită A și o mulțime numărabilă este echipotentă cu A.

Acum a venit momentul să răspundem la o altă întrebare pusă la începutul acestui paragraf. Vom arăta că mulțimea punctelor unei drepte nu este numărabilă. Mai mult, vom arăta că nici măcar mulțimea A a punctelor din intervalul $[0, 1]$ nu este numărabilă. Să presupunem, prin reducere la absurd, că A este numărabilă, deci că este echipotentă cu N. Există atunci o bijecție a lui N pe A care asociază numărului natural n elementul a_n din A, deci $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Să notăm cu I_1

cel mai la stînga dintre intervalele [0, 1/3], [1/3, 2/3], [2/3, 1] care nu conține pe a_1. Să împărțim pe I_1 în trei intervale egale și să notăm cu I_2 cel mai la stînga dintre ele care nu conține pe a_2. Continuînd în acest fel, vom obține un șir de intervale $I_1 \supset \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ cu proprietatea că a_n nu aparține lui I_n (pentru $n = 1, 2, \ldots$).

Se poate arăta (exercițiu) că există un punct α — și numai unul — care aparține tuturor intervalelor I_n ($n = 1, 2, \ldots$), deci și intervalului [0, 1]. Deoarece $[0, 1] = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ există un număr natural p astfel încît $\alpha = a_p$. Pe de altă parte, din faptul că α aparține lui I_p iar a_p lipsește din I_p, rezultă că $\alpha \neq a_p$. Am ajuns astfel la o contradicție care demonstrează că intervalul [0, 1] nu este o mulțime numărabilă.

Mulțimile echipotente cu intervalul [0, 1] au fost numite de către Cantor *mulțimi de puterea continuului* iar numărul cardinal corespunzător a fost numit *puterea continuului*. Se poate arăta că mulțimea punctelor din plan și mulțimea punctelor de pe dreaptă sînt de puterea continuului (cititorii pot găsi singuri o bijecție a intervalului [0, 1] pe dreapta numerică). Iată deci că în plan sînt tot atîtea puncte ca și pe dreaptă. Caracterul paradoxal al acestui rezultat decurge din faptul că intuiția noastră este formată pe mulțimi finite; în ceea ce privește mulțimile finite, într-adevăr nu este posibil ca o mulțime să fie echipotentă cu o parte strictă a sa. Acest lucru devine însă nu numai posibil, dar și necesar, în cazul mulțimilor infinite; proprietatea unei mulțimi de a putea fi echipotentă cu o parte strictă a sa poate fi luată ca definiție a mulțimilor infinite.

Așadar, am arătat că mulțimile la care se referă primele două întrebări de la începutul acestui paragraf sînt de puterea continuului. Se poate arăta,

dar nu o vom face aici, că și mulțimea funcțiilor derivabile este tot de puterea continuului.

Fiind date două numere cardinale a și b, spunem că a este mai mic decît b și scriem $a < b$ dacă $a \leqslant b$, dar $a \neq b$ (cu alte cuvinte, o mulțime de cardinal a nu este echipotentă cu o mulțime de cardinal b). Ceea ce am demonstrat, se enunță astfel: *puterea numărabilului este mai mică decît puterea continuului.*

Există numere cardinale mai mari decît puterea continuului? Răspunsul este afirmativ; astfel, familia submulțimilor intervalului [0, 1] are un număr cardinal mai mare decît puterea continuului.

Numărul cardinal al mulțimii tuturor funcțiilor reale de o variabilă reală este de asemenea mai mare decît puterea continuului. Are loc un fapt mai general: Operația de ridicare la putere în care baza și exponentul sînt același număr transfinit a conduce la un număr superior lui a; de aici a pornit ciclul *Alef la puterea alef* al lui Nichita Stănescu.

GÎNDIREA TRANSFORMATOARE

În ultimele decenii există o preocupare intensă pentru a se elucida natura momentelor revoluționare în viața științei. K. Popper, T. Kuhn, S. Toulmin, J. Sneed, W. Stegmüller sînt numai cîțiva dintre autorii mai importanți în această privință. Cartea fundamentală a lui Popper și două dintre cărțile lui Kuhn au apărut și în versiune românească. Ansamblul problemei este analizat în tratatul de *Teoria cunoașterii științifice*, publicat în Ed. Academiei R.S.R. în anul 1982.

Captivat de unele analize de detaliu pe care autorii de mai sus le întreprind, trebuie să mărturisesc că am fost mai puțin convins de aparatul con-

ceptual pe care îl propun. Orientați, cu precădere spre problemele disciplinelor de tipul fizicii, chimiei sau biologiei și ignorînd acele mutații care provin nu atît din viața internă a unei științe cît din influențele exercitate din exterior, conceptele folosite de ei (teorie, experiment, paradigmă, dezvoltare normală, dezvoltare excepțională, disciplină științifică, populație conceptuală, idealuri explicative, pentru a ne limita la Popper, Kuhn și Toulmin) nu prezintă suficientă specificitate, rigoare și relevanță pentru a explica mutațiile care au avut loc în evoluția matematicii.

Există însă și o altă cale pe care omul de știință o poate urma: să observe, pe baza experienței și culturii sale personale, care sînt sursele transformărilor radicale prin care a trecut disciplina sa. Desigur, adoptînd această strategie, pretențiile vor fi mai modeste decît în cazul autorilor citați, dar sugestiile s-ar putea dovedi utile. Indicăm, în cele ce urmează, unele tipuri de evenimente deosebite în viața științei, cele mai multe observate în matematică; în ce măsură sînt ele valabile pentru alte discipline, rămîne de văzut.

A. Rezolvarea unei probleme grele, cu o rază mare de acțiune, deci de a cărei soluționare depind numeroase alte probleme. Tipice, din acest punct de vedere, sînt unele dintre problemele formulate de Hilbert la începutul secolului nostru, de exemplu problema continuului rezolvată de Gödel și Cohen într-un sens neașteptat, care a creat un nou statut logic, cel de propoziție independentă. Tot aici va intra, cînd va fi tranșată, într-un sens sau altul, ipoteza lui Riemann privind zerourile funcției dzeta. Înlăturarea acestei dileme va decide situația multor chestiuni fundamentale de teoria numerelor. Problema celor patru culori, rezolvată recent, este

și ea un exemplu în acest sens, deoarece a condus la cristalizarea unui nou tip de demonstrație.

B. Apariția unui punct de vedere nou în tratarea fundamentelor unui domeniu, avînd consecințe asupra ansamblului domeniului. Un exemplu îl constituie Analiza nonstandard a lui Robinson (1960), pe baza căreia Analiza matematică a fost reconstruită în ipoteza abolirii axiomei lui Arhimede (afirmînd că pentru orice două numere pozitive există un număr natural al cărui produs cu primul îl întrece pe al doilea). O situație asemănătoare o au Analiza constructivă și Analiza fuzzy.

C. Trecerea la un stadiu superior de rigoare și precizie, care impune un nou limbaj. Exemplu: evoluția Analizei matematice de la etapa leibniziană a infinițiilor mici la limbajul epsilon, promovat de Cauchy, Riemann etc.

D. Cristalizarea unui nou mod de a pune problemele. Aici intră evoluția teoriei ecuațiilor diferențiale de la problematica tradițională a integrării acestor ecuații la teoria calitativă, constînd în a citi proprietățile soluțiilor chiar pe forma ecuației.

E. Transformarea unor chestiuni anterior considerate distincte în manifestări particulare ale unui fenomen unic, mai cuprinzător și mai profund. Teoremele de punct fix constituie un astfel de instrument unificator (în matematică), după cum studiul general al fenomenelor oscilatorii este un exemplu la contactul matematicii cu științele naturii.

F. Extinderea obiectului unei discipline, prin promovarea unui punct de vedere nou. Astfel, matematica nu se mai reduce azi la studiul fenomenelor cantitative și spațiale (cum se considera în secolul trecut), ci a devenit o știință generală a relațiilor, structurilor și sistemelor de natură nespecificată. Lingvistica nu-și mai limitează interesul la

limbile naturale, ci își extinde obiectul și asupra acelor limbaje logice și algoritmice care intervin inevitabil în studiul sintaxei, semanticii și pragmaticii lingvistice.

G. Elaborarea unui nou mod de explicare a unei categorii largi de fenomene. Tipică, în acest sens, este evoluția de la explicarea mecanică (newtoniană) a funcționării unui sistem (fizic, biologic, social) la explicarea entropică (inițiată de principiul al doilea al termodinamicii) și, apoi, trecerea la explicarea sistemelor cu autoorganizare (în sensul cărții lui Erich Jantsch, *The self-organizing universe*, Pergamon Press, 1980).

H. Transferul de concepte fundamentale dintr-o disciplină în alta. Un exemplu elocvent este transferul conceptelor de entropie și energie din domeniul fizic în cel informațional (Shannon, Onicescu).

I. Extinderea considerabilă și diversificarea metodei modelării. Unul dintre fenomenele cele mai semnificative îl constituie aici amploarea pe care au luat-o modelele matematice, fizice, biologice în domeniile social-umaniste.

J. Dezvoltarea vertiginoasă a mijloacelor de calcul. Una dintre consecințele acestei dezvoltări este creșterea importanței metodelor aproximative; finitul devine din ce în ce mai relevant și mai rentabil în aproximarea infinitului.

K. Emanciparea calculului de tutela cantitativului. Dezvoltarea calculului pur simbolic (prin Turing, Kleene, Markov etc.), împreună cu fenomenul (J), a constituit o premisă esențială pentru dezvoltarea inteligenței artificiale.

L. Interacțiuni din ce în ce mai profunde între discret și continuu. Impactul analizei asupra teoriei numerelor și cel al algebrei asupra analizei sînt din ce în ce mai puternice. Fenomenul poate fi observat

și în fizică (dualitatea undă-corpuscul), biologie (ontogenie-filogenie), lingvistică (limbă-vorbire).

M. Apariția unor noi capitole ale matematicii, ca urmare a unor influențe externe. Astfel s-au născut teoria distribuțiilor (sub influența fizicii), teoria *L*-sistemelor (sub influența biologiei), teoria jocurilor (sub influența disciplinelor sociale).

N. Perspective noi în cadrul unei discipline, ca urmare a descoperirii unor noi aplicații ale ei (de exemplu, în teoria operatorilor, prin aplicațiile ei în geologie).

O. Dezvoltarea domeniilor interdisciplinare (fizica matematică, biologia matematică, psihologia matematică, lingvistica matematică, economia matematică). Sintagma *chimie matematică* este pe cale de constituire, după cum rezultă din titlul revistei *Match (= Matehmatical Chemistry).*

P. Apariția unor perspective integratoare (matematică, sistemică, semiotică), de natură a subsuma unei paradigme comune întreaga cunoaștere.

R. Folosirea unui domeniu drept catalizator pentru colaborarea dintre alte domenii. Astfel, matematica a făcut posibilă evidențierea legăturilor dintre genetică și lingvistică, dintre lingvistică și economie, dintre fizică și teoria informației.

S. Dezvoltarea unor aplicații la contactul direct cu comanda socială. A se vedea, în acest sens, întreaga *matematică a dezvoltării* (în sensul cărții colective publicate în 1982 la Ed. Academiei, *Metode matematice în problematica dezvoltării).*

T. Repunerea în discuție a proceselor de învățare și de creație, pentru ca la creșterea exponențială a nevoilor umane să se poată răspunde cu o creștere corespunzătoare a satisfacerii acestor nevoi.

Desigur, tipurile de mutații descrise mai sus sînt, într-o largă măsură, interdependente.

GÎNDIREA PRIN NUMERE REMARCABILE; GOANA DUPĂ ZECIMALELE LUI PI

O carte publicată în 1977 în a doua ei ediție (după ce prima fusese tradusă în limba rusă) atrage atenția asupra unui număr care a marcat istoria culturii. Este vorba de *Povestea numărului pi* de Florica T. Câmpan (Ed. Albatros, București).

Numărul *pi* exprimă raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul său, remarcabil fiind aici faptul că acest raport este același la orice cerc. Prima întrebare, datînd de cîteva mii de ani, cu privire la numărul *pi* se referă la natura sa: este el un număr rațional, adică raportul a doua numere întregi (cum ar fi 10/3 sau 17/5) sau, dimpotrivă, este irațional? Interesul acestei întrebări a crescut datorită unei probleme datînd tot din antichitate, a cărei legătură cu natura lui *pi* va fi repede sesizată. Este vorba de celebra problemă a cuadraturii cercului, constînd în construirea, cu ajutorul exclusiv al riglei și compasului, a unui pătrat de arie egală cu aceea a unui cerc de rază dată. Aria unui cerc de rază R este egală cu aceea a unui triunghi de înălțime R și de bază egală cu lungimea cercului considerat. Rezultă de aici că, dacă *pi* ar fi un număr rațional, atunci cuadratura cercului ar fi posibilă. În secolul al XVII-lea, Leibniz obține pentru *pi* o dezvoltare în serie sub forma $pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 \ldots$ Această dezvoltare permite în principiu calcularea lui *pi* cu oricîte zecimale exacte dorim; dar chiar determinarea unui număr mic de zecimale reclamă considerarea unui număr foarte mare de termeni ai seriei, ceea ce face foarte neeconomică utilizarea ei. În plus, relația obținută de Leibniz nu aduce nici o clarificare în ceea ce pri-

veşte natura raţională sau iraţională a lui *pi*. Această chestiune este lămurită abia în 1761, cînd J. H. Lambert prezintă Academiei din Berlin demonstraţia iraţionalităţii lui *pi*.

Dar ce fel de număr iraţional este *pi*? În secolul al XVIII-lea, chiar matematicieni ca Leonard Euler persistau în două idei care aveau să se dovedească false: ideea că orice număr iraţional se exprimă prin radicali şi ideea că orice ecuaţie algebrică se poate rezolva prin radicali (deci orice număr iraţional este soluţie a unei ecuaţii algebrice). În 1822, Niels Abel arată că, pentru orice $n \geqslant 5$, există ecuaţii algebrice de grad n care nu pot fi rezolvate prin radicali. Există deci numere iraţionale algebrice (adică soluţii ale unor ecuaţii algebrice) care nu pot fi exprimate prin radicali. Apărea astfel în mod natural întrebarea dacă nu cumva există numere iraţionale care nici măcar nu sînt algebrice. La jumătatea secolului trecut, Joseph Liouville dă la această întrebare un răspuns afirmativ, reuşind să indice cîteva clase infinite de numere iraţionale nealgebrice, numere numite transcendente. Ulterior, Georg Cantor, creatorul teoriei mulţimilor, arată că mulţimea numerelor transcendente este mai bogată decît a celor algebrice. Apare astfel legitimă întrebarea dacă numărul *pi* este algebric sau transcendent (numerele raţionale sînt cazuri particulare de numere algebrice). Rezultatele lui Liouville nu aduceau nici o lumină în această chestiune, deoarece *pi* nu se afla în nici una dintre clasele de numere transcendente identificate de acesta.

Cel care a reuşit să stabilească natura transcendentă a lui *pi* a fost Ferdinand von Lindemann.

Aceasta s-a întîmplat în 1882. Demonstrația sa folosește o interesantă identitate stabilită de Euler, care leagă între ele trei numere celebre: $e^{ipi} = -1$. Aici, numărul *e* este baza naturală a logaritmilor, iar *i* este simbolul imaginar dat de rădăcina pătrată a lui —1. Lindemann a mai folosit faptul că relația $y = e^x$ nu e satisfăcută de nici o pereche de numere algebrice, în afară de $x = 0$, $y = 1$. Cu rezultatul lui Lindemann, imposibilitatea cuadraturii cercului este demonstrată (fapt care, din păcate, nu i-a descurajat pe impostori să încerce s-o realizeze și, de multe ori, să pretindă că au realizat-o; în cursul său de teoria lui Galois a ecuațiilor, Ion Barbu a îndreptat asupra acestor impostori o satiră necruțătoare).

Putem spune că am descifrat toate tainele numărului *pi*? Eforturile se desfășoară acum în direcția determinării unui cît mai mare număr de zecimale exacte ale sale. (Cu o aproximație de patru zecimale, numărul *pi* este egal cu 3,1416). În trecut, aceste calcule se făceau manual și nu de puține ori s-au comis greșeli. Un moment important a fost anul 1873, cînd W. Shanks a ajuns la 707 zecimale ale lui *pi;* aceste zecimale au fost înscrise de-a lungul unei frize, în camera rotundă din „Palatul descoperirilor" din Paris. Actualmente, cu ajutorul calculatoarelor electronice, s-au recalculat zecimalele lui Shanks, constatîndu-se că zecimala a 505-a era greșită! În anul 1954, au putut fi determinate, în numai 12 minute, 3000 de zecimale ale lui *pi*, în 1961 o sută de mii de zecimale numai în 9 ore, în 1966 s-au determinat 250 000 de zecimale, iar în 1967 cinci sute de mii de zecimale. Fără îndoială că între timp acest rezultat a fost și el mult depășit.

GÎNDIREA PRIN NUMERE REMARCABILE: NUMĂRUL DE AUR $\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$

Poate un număr să capete o încărcătură de semnificaţii care să-l aşeze printre obiectele de importanţă deosebită nu numai din punct de vedere matematic, ci şi în ceea ce priveşte natura şi umanitatea? Această performanţă a realizat-o aşa-numitul număr de aur, egal cu $(1 + \sqrt{5})/2$. Simplul fapt că o colecţie atît de populară cum este „Que sais-je?" (publicată de editura pariziană Presses Universitaires de France) a publicat în 1975 o a doua ediţie a unei cărţi cu acest subiect (Marius Cleyet-Michaud, *Le nombre d'or*) este semnificativ în această privinţă.

Din punct de vedere matematic, numărul de aur nu a pus probleme atît de dificile ca acelea care au marcat istoria numărului pi. Primele texte scrise care conţin referiri la numărul de aur (denumire introdusă abia în epoca contemporană) datează de la grecii antici, dar este foarte plauzibil că descoperirea lui empirică s-a produs încă în preistorie. Cunoaşterea experimentală a acestui număr a precedat cunoaşterea sa riguroasă, realizată de greci. Natura iraţională a numărului de aur ca şi proprietăţile sale geometrice de bază apar încă în *Elementele* lui Euclid. Numărul de aur este soluţia pozitivă a ecuaţiei $x^2 - x - 1 = 0$. Dacă un segment de dreaptă este împărţit în două subsegmente inegale, în aşa fel încît raportul dintre subsegmentul mare şi cel mic să fie egal cu raportul dintre segmentul total şi subsegmentul mare, atunci valoarea comună a acestor rapoarte este numărul de aur (avem aici clasica problemă a împărţirii în medie şi extremă raţie).

O lumină nouă asupra numărului de aur este adusă de aşa-numitul şir al lui Fibonacci, unul dintre cei

mai mari matematicieni ai evului mediu. Acest şir are primii doi termeni egali cu 1 şi fiecare termen următor este suma celor doi termeni imediat precedenţi: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Şirul format din rapoartele termenilor consecutivi 1, 2, 3/2, 5/3, 8/5, ... are ca limită numărul de aur. Fibonacci a obţinut şirul său studiind modul de înmulţire a iepurilor. Ipotezele sale erau următoarele: un cuplu C_1 de iepuri dă naştere unui alt cuplu C_{12} (la a doua generaţie) şi unui cuplu C_{13} (la a treia generaţie). Tot aşa C_{12} dă naştere unui cuplu C_{123} la a treia generaţie şi unui alt cuplu C_{124} la a patra generaţie ş.a.m.d. Se observă astfel că, notînd cu u_n numărul de cupluri care alcătuiesc generaţia a n-a, avem $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$; cum avem $u_1 = u_2 = 1$, se obţine tocmai şirul lui Fibonacci. Notaţia tradiţională pentru numărul de aur este litera grecească φ (*fi*). Anumiţi invarianţi de bază ai unor poligoane regulate, ca pentagonul şi decagonul, şi ai unor poliedre regulate, ca dodecaedrul ale cărui 12 feţe sînt pentagoane regulate convexe şi ca icosaedrul ale cărui 20 de feţe sînt triunghiuri echilaterale, se exprimă cu ajutorul lui *fi*. Astfel, raportul dintre raza unui cerc şi latura decagonului convex înscris în cerc este egală cu *fi*, după cum tot cu *fi* este egal raportul dintre latura decagonului stelat şi raza cercului circumscris. Raportul dintre latura unui pentagon stelat înscris într-un cerc şi latura pentagonului convex înscris în acelaşi cerc este egal cu *fi*. Raportul dintre latura unui pentagon convex şi raza cercului circumscris este $\sqrt{3} - fi$, în timp ce acelaşi raport este, la un pentagon stelat, egal cu $\sqrt{2} + fi$. Faptele au consecinţe în regnul vegetal, unde multe flori au cinci petale ale căror vîrfuri determină un pentagon regulat sau zece petale de asemenea dispuse în mod regulat. Dar un

alt exemplu, ceva mai complicat, este probabil mai semnificativ. Să examinăm modul în care sînt dispuse frunzele pe o tulpină, limitîndu-ne la acel caz în care frunzele sînt alterne sau izolate; aceasta înseamnă că fiecare frunză este atașată de tulpină într-un nod și fiecărui nod îi corespunde o singură frunză. Specii ca mărul, părul sau stejarul prezintă următoarea situație. Nodurile sînt dispuse pe un fel de elice care înconjoară tulpina, aceasta din urmă fiind asimilată cu un cilindru de secțiune dreaptă circulară. Există exact cinci generatoare ale cilindrului, cu proprietatea că nodurile sînt, toate, puncte de intersecție ale acestor generatoare cu elicea. Generatoarele întîlnesc circumferința unei secțiuni perpendiculare pe ele în puncte apropiate de vîrfurile unui pentagon regulat. Plecînd dintr-un anumit nod, să descriem două spire ale elicei pentru a ajunge la un alt nod situat pe aceeași generatoare ca și nodul de la care am plecat. Raportul dintre numărul minimal de spire între două noduri situate pe aceeași generatoare și numărul de generatoare pe care se află situate nodurile se numește ciclu de foliere. După cum s-a văzut mai sus, acest ciclu este egal cu 2/5 în cazul mărului, al părului și al stejarului. În cazul teiului și al ulmului, ciclul de foliere este egal cu 1/2 iar pentru arin el e 1/3. Însă valorile 1/2, 1/3 și 2/5 sînt primii trei termeni ai șirului de termen general u_{n-2}/u_n (adică raportul dintre termenul de rang $n-2$ și cel de rang n din șirul lui Fibonacci), despre care se poate arăta că tinde către $1/fi^2$.

Dar poate că cele mai frapante ipoteze legate de numărul de aur se referă la corpul uman. Raportul dintre înălțimea unui om și înălțimea la care se află ombilicul său este egal cu *fi*. La fel, în scheletul degetelor, raportul dintre două falange con-

secutive este egal cu *fi*. În sfîrșit, să menționăm că punctul cel mai de sus al capului formează, împreună cu extremitățile mîinilor și picioarelor, vîrfurile unui pentagon regulat stelat, înscris într-un cerc. Confirmarea acestor ipoteze ar comporta bogate observații statistice, dar nu știm ca ele să se fi făcut.

GÎNDIREA COMBINATORIE ȘI COMPUTAȚIONALĂ

În iulie 1976, în Buletinul Societății Americane de Matematică, a apărut un text de numai două pagini, care anunța rezolvarea uneia dintre cele mai celebre probleme rămase de multă vreme fără răspuns: Problema celor patru culori. Autorii soluției, doi matematicieni de la Universitatea din Illinois, S.U.A., Kenneth Appel și Wolfgang Haken, nu s-au rezumat la acest anunț laconic; în revista Illinois Journal of Mathematics ei au publicat, în 1977, un text de 140 de pagini conținînd o expunere amplă a soluției. Dar stupoare! Matematicienii se aflau pentru prima oară în fața unui text a cărui veracitate n-o puteau testa personal și direct; anumite părți ale soluției erau efectuate cu ajutorul calculatorului electronic, iar verificarea lor era condiționată de accesul la un anume tip de calculator și de toate servituțile pe care le comportă verificarea unor programe de calculator deosebit de laborioase. Rigoarea matematică, orgoliul suprem al matematicianului, de la Euclid încoace, era, pentru a treia oară în decurs de o sută de ani, pusă la grea încercare. Prima oară, la sfîrșitul secolului trecut, provocarea venise sub forma paradoxurilor logice și semantice care sabotau bătrînul principiu aristote-

lian al noncontradicției. A doua provocare fusese lansată în 1931, prin teorema lui Kurt Gödel privind imposibilitatea formalizării totale a aritmeticii. A treia provocare, din 1976, pare însă cea mai scandaloasă, deoarece ea nu mai provine din natura gîndirii umane, ci din utilizarea unui instrument pe care chiar omul l-a făurit, cu intenția de a-l menține mereu sub control; dar iată, tocmai acest control stătea acum sub semnul întrebării!

Istoria problemei celor patru culori începe în anul 1852, cînd un student londonez, Francis Guthrie, a emis ipoteza conform căreia patru culori sînt suficiente pentru a colora regiunile oricărei hărți plane, în așa fel încît două regiuni vecine să primească totdeauna culori diferite (prin regiuni vecine înțelegîndu-se regiuni care au ca frontieră comună — sau o parte a acestei frontiere — o linie continuă, fie ea cît de mică). Frederick, fratele lui Francis, a prezentat această problemă lui Augustus de Morgan, (unul dintre fondatorii logicii matematice), care nu putuse s-o rezolve, dar și-a exprimat convingerea că ipoteza lui F. Guthrie va fi confirmată. În orice caz, era clar de la început că trei culori nu sînt suficiente; de exemplu, pornind de la două cercuri concentrice și împărțind, prin trei segmente de dreaptă zona dintre cele două cercuri în trei regiuni egale, acestea împreună cu regiunea delimitată de cercul interior nu pot, evident, să fie colorate numai cu trei culori. Ștafeta acestei probleme a fost preluată de un alt matematician celebru, Arthur Cayley, care, neputînd-o rezolva, a prezentat-o la Societatea de Matematică din Londra. Un membru al acestei societăți, Arthur Bray Kempe, publică în 1879 un articol în care pretinde că demonstrează conjectura lui Guthrie. În ciuda faptului că demonstrația sa s-a dovedit a fi incompletă,

(greșeala avea să fie descoperită în 1890 de către Percy John Heawood), ea conținea cea mai mare parte a ideilor care aveau să ducă, un secol mai tîrziu, la rezolvarea problemei. O noțiune importantă introdusă de Kempe este aceea de *hartă normală*, caracterizată prin două proprietăți: 1) maximum trei regiuni pot avea un punct frontieră comun și 2) nici o regiune nu este complet înconjurată de o altă regiune. Kempe arată că este suficient să se demonstreze conjectura lui Guthrie pentru hărți normale, pentru ca ea să fie confirmată pentru orice hartă.

Un timp, greșeala descoperită de Heawood în demonstrația lui Kempe părea să fie minoră, ușor de depășit. Însă anii treceau și toate tentativele în acest sens eșuau. Heawood a lucrat timp de 60 de ani la această problemă, fără succes. Au fost aceste eforturi inutile? Au fost inutile eforturile investite în atîtea alte probleme, rămase totuși nerezolvate? Un exemplu instructiv ni-l oferă, în acest sens, faimoasa problemă a lui Fermat, privind posibilitatea rezolvării în întregi pozitivi a ecuației $x^n + y^n = z^n$. Această problemă, veche de peste trei secole, nu a fost încă rezolvată. Dar ideile și tehnicile dezvoltate cu prilejul diferitelor tentative de a o rezolva au contribuit foarte mult la progresul algebrei (în particular, noțiunea algebrică de *ideal* a fost introdusă cu prilejul unei astfel de tentative). Ceva asemănător s-a întîmplat cu problema celor patru culori. Multe din ideile și tehnicile apărute în studiul ei, dar care nu au fost valorificate (cel puțin pînă azi) în rezolvarea problemei celor patru culori au impulsionat teoria matematică a grafurilor, atît de importantă azi în aplicații care merg de la economie la lingvistică și de la fizică și chimie la geografie. Acesta este de multe ori itinerarul inte-

ligenței umane; ceea ce dezvoltă ea pornind de la o anumită problemă este valorificat cu precădere în alte probleme, apărute ulterior.

De la Kempe, ștafeta problemei culorilor a fost preluată de cercetătorii ultimelor decenii, inclusiv de către Appel și Haken. Două dintre conceptele introduse de Kempe s-au dovedit a fi deosebit de importante. Prima este aceea de *configurație inevitabilă*, în sensul că ea apare obligatoriu în orice hartă normală. Kemps a arătat că orice astfel de hartă conține cel puțin o țară (regiune) cu doi, trei, patru sau cinci vecini. Nu există deci nici o hartă normală în care fiecare țară are cel puțin șase vecini.

De la conceptul de figurație inevitabilă se trece la cel de mulțime inevitabilă de configurații, în sensul că orice hartă normală conține cel puțin o configurație din mulțime.

A doua idee importantă a lui Kempe este aceea de *reductibilitate*. Numind n-cromatică o hartă care nu poate fi colorată decît cu minimum n culori (în așa fel încît oricare două țări vecine să fie colorate diferit), Kempe a arătat că dacă ar exista o hartă 5-cromatică în care o anumită țară ar avea patru vecini, atunci ar exista și o hartă 5-cromatică avînd un număr redus de țări față de harta inițială. Cu alte cuvinte, într-o hartă 5-cromatică cu un număr minim de țări nu poate să apară o țară cu patru vecini. O configurație este deci reductibilă dacă ea nu poate să apară într-o hartă 5-cromatică minimală. Altfel spus, o configurație este reductibilă dacă nu poate să apară în nici un contra exemplu minimal la conjectura celor patru culori. Cercetările lui George David Birkhoff (binecunoscutul pionier al esteticii matematice), Philip Franklin și ale continuatorilor lor au dus, la jumătatea secolului nostru,

la următorul rezultat: Dacă există o hartă 5-cromatică, atunci ea conține cel puțin 36 de țări.

Dar ce legătură au toate acestea cu problema celor patru culori? Heinrich Heesch de la Universitatea din Hanovra, este cel care, în 1950, a reformulat bănuiala lui Kempe că demonstrarea conjecturii celor patru culori ar putea fi o consecință a existenței unei mulțimi inevitabile de configurații reductibile.

Dificultatea consta însă în faptul că, deși se cunoșteau atît exemple de mulțimi inevitabile de configurații cît și exemple de configurații reductibile, nimeni nu fusese în stare să producă un exemplu de mulțime inevitabilă de configurații reductibile. În 1950, Heesch a emis ipoteza existenței unei astfel de mulțimi, evaluînd la aproximativ zece mii numărul de configurații pe care ea ar trebui să le conțină. Dificultatea identificării unei atari mulțimi era dublă, deoarece trebuia să se inspecteze atît natura reductibilă a configurațiilor cît și caracterul inevitabil al întregii mulțimi. Erau puține speranțe ca un număr atît de mare de încercări să poată fi efectuate manual. Dar anii care au urmat, prin dezvoltatea vertiginoasă a calculatoarelor electronice, au deschis o nouă perspectivă în testarea reductibilității și inevitabilității. Între timp, procedurile de testare căpătaseră un caracter algoritmic, fiind astfel apte de a fi programate la calculator. Un rol important în această privință l-a avut Karl Dürre, un student al lui Heesch. Cercetările lui Heesch și Dürre au fost duse mai departe în jurul anilor 70, de către Haken; dar noi dificultăți aveau să apară, într-un moment în care soluția problemei culorilor părea mai aproape ca oricînd. Aceste dificultăți erau legate de timpul de calculator necesar pentru testarea reductibilității unor configurații cu ajutorul progra-

mului elaborat de Dürre. Astfel, numai pentru o singură configurație — care nu părea să fie dintre cele mai complicate — fuseseră necesare 26 de ore de calculator pentru a se stabili că ea nu este reductibilă, în timp ce, pentru configurații care urmau imediat, ca ordin de complexitate, timpul mediu de calculator pentru testarea reductibilității era de 100 de ore, fiind în același timp nevoie de o memorie care depășea posibilitățile oricărui calculator existent în urmă cu zece ani. O altă dificultate era aceea de a anticipa ordinul de mărime al numărului de configurații reductibile necesare pentru a se obține o mulțime inevitabilă. Acest număr era suspectat a fi de ordinul miilor, fapt care conducea la un timp de calculator de aproximativ 100 000 de ore (vreo 11 ani), în ipoteza că se lucra pe un calculator dintre cele mai puternice.

În această situație existau două șanse de depășire a dificultăților: una, activă, de încercare a elaborării unui program de calculator mai simplu decît cel existent, care să permită detectarea configurațiilor reductibile în limitele unor valori rezonabile ale memoriei și timpului de calculator; alta, pasivă, de așteptare a apariției unor calculatoare mult mai puternice decît cele existente. Appel și Haken au mizat, în 1972, pe prima șansă, angajîndu-se în elaborarea unui nou program de calculator, al cărui rezultat putea fi verificat manual. Un dialog om-mașină care a durat peste șase luni a dus la conturarea unei metode de obținere a unei mulțimi inevitabile de „configurații geografic bune". Appel și Haken au dat totodată o demonstrație a faptului că metoda lor acoperea toate situațiile posibile și că ea conducea în mod sigur la o mulțime de tipul dorit. (Un student de la Universitatea din Harvard, Walter Stromquist, reușise să obțină, pentru existența ace-

leiași mulțimi, o demonstrație elegantă, dar metoda nu era constructivă). În anul 1975, începea, la un calculator IBM 360 de la Universitatea din Illinois, testarea reductibilității configurațiilor. Între timp, se asociase la aceste cercetări și Johan Koch, pe atunci doctorand în Informatică.

Este momentul să menționăm un fapt căruia Appel și Haken îi acordă o deosebită semnificație (a se vedea mărturia lor în articolul *The four color problem,* în volumul *Mathematics Today,* editat de L. A. Steen, Springer Verlag, 1978; acest articol și cel al lui D.R. Woodal și R.J. Wilson din volumul *Selected topics in Graph, Theory* editat de L.W. Beineke și R.J. Wilson, Academic Press 1978, au constituit o sursă de bază în elaborarea textului de față) și asupra căruia urmează să reflectăm toți cei care sîntem preocupați de alegerea celor mai bune strategii ale cercetării științifice. Appel și Haken vorbesc despre șansa, despre norocul pe care l-au avut de a lucra la Universitatea din Illinois. În ce constă acest noroc? În faptul că, adresîndu-se Centrului de calcul al acestei universități pentru a solicita nici mai mult, nici mai puțin de o mie de ore de calculator, pentru o problemă fără finalitate practică directă (nimeni nu și-a făcut vreodată iluzia că rezolvarea problemei culorilor ar putea avea consecințe notabile asupra cartografiei) și pentru care nu se putea oferi atunci nici o garanție că cercetarea se va solda cu o soluție completă, ei nu au fost întîmpinați cu refuzul obișnuit în astfel de situații. „Nu dispuneam de nici un sprijin material, deși încercasem să-l obținem" spun Appel și Haken. „Un atare sprijin poate fi obținut numai dacă referenții, în unanimitate, garantează pentru succesul cercetării și, desigur, o astfel de unanimitate nu poate exista cînd este vorba de o problemă ca aceea a

celor patru culori". În locul unui refuz — atît de comod în astfel de situații — Universitatea din Illinois s-a prevalat de faptul că ordinatoarele ei nu erau utilizate în mod continuu; între orele în care ele erau folosite pentru cercetare și cele în care ele erau folosite pentru activitatea cu studenții, rămîneau unele ferestre de care puteau beneficia „aventurieri" ca Appel și Haken. Era un act curajos din partea Universității din Illinois, care înțelegea că explorarea unei probleme atît de dificile comportă riscul eșecului, dar care înțelegea totodată că o universitate trebuie să-și asume acest risc, în conformitate cu menirea ei de a stimula și sprijini cercetările dificile, de a răspunde marilor provocări adresate inteligenței umane. Un act de o asemenea îndrăzneală întîmpină deobicei o rezistență puternică din partea unor birocrați, care preferă să vadă calculatoarele șomînd decît să le lase să fie folosite într-un proiect a cărui finalizare nu este certă.

Acestea au fost condițiile în care Appel și Haken au reușit, după ani de eforturi, să stabilească existența unei mulțimi inevitabile de configurații reductibile și, implicit, să demonstreze că patru culori sînt suficiente pentru a colora orice hartă. Isprava lor nu a stîrnit totuși entuziasmul așteptat, ci mai degrabă o derută care persistă și astăzi. Să încercăm s-o explicăm.

În ce constă arta convingerii? Ea nu e aceeași în oratorie ca în pictură sau ca în matematică. Este un truism faptul că demonstrația matematică se bazează pe logică. Dar această idee are nevoie să fie detaliată. Înțelegerea unei demonstrații matematice nu constă numai în înțelegerea fiecărei verigi din care ea este alcătuită, ci și în cuprinderea tuturor acestor verigi într-o idee unitară, care explică întreaga ei desfășurare. Tocmai această din urmă con-

diție este pusă sub semnul întrebării în demonstrația lui Appel și Haken. Mai întîi, această demonstrație este deosebit de lungă, fapt care explică utilizarea calculatorului. Însă intuiția noastră, formată în condiții în care nu s-a făcut apel la calculator, nu se poate mulțumi (încă!) cu argumente ale căror componente nu pot fi verificate, toate, prin operații mintale și manuale directe. În locul unei verificări de acest fel, ni se propune controlul rezultatelor activității computaționale prin programe de calculator independente. Însă corectitudinea acestui control poate fi cu greu pusă sub observație; în orice caz, această observare este de resortul unui număr restrîns de specialiști, alții decît cei care au lucrat la aspectele necomputaționale ale demonstrației. Are loc un proces de fărîmițare a efortului demonstrativ. Nu mai este suficientă o anume calificare profesională pentru a verifica o demonstrație; o atare verificare rămîne de competența unor cercuri relativ restrînse de specialiști, care dispun în plus și de mijloacele computaționale necesare. Demonstrația, controlul ei se aristocratizează. Matematicianul, ca personalitate stăpînită de o încredere practic nelimitată în puterea gîndirii sale deductive, se simte frustrat. Însă o atare atitudine s-a format de-a lungul unei istorii în care demonstrațiile matematice aveau o lungime rezonabilă. După părerea lui Appel și Haken, în condițiile noi, ale unor demonstrații constînd mai mult în calcule decît în argumente teoretice și depășind mult în lungime demonstrațiile cu care matematica ne obișnuise timp de cîteva mii de ani, nu mai putem avea pretenția unei vederi de ansamblu asupra demonstrației și nici nu e rezonabil ca un matematician individual să controleze pe cale manuală întreaga demonstrație; probabilitatea ca el să greșească ar fi în acest caz mult mai mare decît

probabilitatea unei erori la calculator; de asemenea, în condițiile unor calcule suficient de rutinare, este mai comod să se verifice validitatea programelor de calculator înseși decît corectitudinea unor calcule manuale.

Trebuie oare să devenim îngrijorați pentru faptul că ne aflăm în fața unor demonstrații matematice din ce în ce mai lungi? Ar fi justificată panica produsă de posibilitatea ca omul să piardă controlul propriilor sale argumentări? Răspunsul este hotărît negativ. Însuși faptul că s-a putut crea această nouă situație, a unor demonstrații care nu mai au o structură logică omogenă, tutelată de silogismul aristotelian în forma sa pur teoretică, ci dobîndesc o structură eterogenă, în cadrul căreia componentele teoretice se combină cu cele înalt computaționale; însuși faptul că ne aflăm în fața unor demonstrații de o lungime fără precedent reprezintă o extindere considerabilă a razei de acțiune a gîndirii umane, o extindere în care componenta tradițională este suplimentată cu una tehnică. Dificultățile care apar sînt răsplătite din plin de noile perspective care ni se oferă. Am acceptat tot felul de proteze pentru prelungirea puterii simțurilor noastre, pentru amplificarea forței noastre fizice; de ce nu am accepta și proteze care prelungesc capacitatea gîndirii noastre demonstrative? Dar dacă acceptăm această situație nouă, este firesc să acceptăm și problemele noi pe care ea le generează și să învățăm să le rezolvăm sau să ne adaptăm, treptat, la unele modalități noi de obținere a rezultatelor matematice. Sînt mai puțin de o sută de ani de cînd demonstrația în matematică se făcea după logica simțului comun; nimănui nu-i trecea prin minte să pună la îndoială legitimitatea acestei logici. A apărut apoi criza generată de studiul infinitului și ne-am dat seama că unele principii cu-

rente ale logicii, dobîndite din experiența noastră cu mulțimi finite, nu mai rămîn valabile cînd este vorba de mulțimi infinite. Alături de principiul aristotelian al noncontradicției a fost pus sub semnul întrebării și principiul terțului exclus. S-a dezvoltat intuiționismul matematic (Brouwer). S-a elaborat o teorie a demonstrației matematice (Hilbert), cu ajutorul noțiunii de sistem formal. Dar această înțelegere mai profundă a ideii de demonstrație a dus și la înțelegerea limitelor acțiunii ei (Gödel). Există o întreagă tradiție de schimbări revoluționare în înțelegerea conceptului de demonstrație. Acum, ni se lansează o nouă provocare. Problema culorilor nu-i decît un exemplu. O sumedenie de probleme de teoria numerelor, de combinatorică, de algebră și din multe alte domenii prezintă o situație asemănătoare. Appel și Haken compară imperativul actual de a împleti, în procesul de demonstrație, metodele matematice pure cu cele computaționale, cu situația survenită în fizică, unde îmbinarea metodelor teoretice cu cele experimentale este calea optimă de progres. Dar pentru ca să se ajungă la acest echilibru între teorie și experiment a fost nevoie de două milenii. Aristotel încercase să deducă exclusiv pe cale teoretică legile căderii corpurilor sub acțiunea gravitației; în aceste condiții nu este de mirare că ajunsese la o formulare greșită. Eroarea sa a fost corectată două mii de ani mai tîrziu, prin observațiile și experimentele efectuate de Galileo și care au stimulat considerabil dezvoltarea dinamicii mecanice.

Presupunînd că ne vom putea adapta destul de repede la noul ordin de mărime al demonstrațiilor matematice și la structura lor eterogenă, teoretico-computațională, va fi mai greu să regăsim, în noua variantă, acea înțelegere a *de ce*-ului subiacent unei demonstrații, sesizarea motivului mai profund pen-

tru care ea funcționează. În demonstrația Appel-Haken nu știm încă să sesizăm ideea care coagulează toate detaliile și etapele; constatăm că se obține răspunsul la problema culorilor, dar nu ne dăm seama ce anume se întîmplă și face ca demonstrația să meargă. Dar, cum observă cu amărăciune D.R. Woodal și R.J. Wilson în articolul menționat mai sus, poate că nici nu putem pretinde fiecărei teoreme matematice a fi susceptibilă de o demonstrație nu numai logic corectă, dar și capabilă să explice rațiunea profundă pentru care teorema funcționează. Poate că există teoreme a căror corectitudine poate fi verificată, dar a căror legitimitate mai profundă ne scapă. La îndoiala lui Woodal și Wilson putem introduce însă o atenuare, care ni se pare esențială. Oricît de mare ar fi decalajul dintre stabilirea corectitudinii unei demonstrații și înțelegerea adevărului rezultatului la care ea conduce, acest decalaj rămîne finit.

Gîndirea înaintează încet, dar nici o limită aprioric nu i se poate fixa. O spusese, sub o altă formă, Arhimede, în urmă cu peste două mii de ani.

Ecourile teoremei celor patru culori (T 4 C) depășesc granițele matematicii, suscitînd vii discuții de o deosebită importanță filozofică. Să menționăm, în această ordine de idei, articolul lui Thomas Tymoczko, *The Four-Color Problem and its Philosophical Significance* (Journal of Philosophy, no. 76(2), 1979, pp. 57—83), unde se formulează alternativa după care T 4 C sau nu este o teoremă matematică sau este o teoremă de un tip cu totul nou. În ce ar consta noutatea? Ea se referă la distincția dintre adevăruri a priori și adevăruri a posteriori. Pentru Tymoczko, un adevăr este a priori dacă validitatea sa este independentă de impresiile simțurilor noastre. Altfel, el este a posteriori. Adevărurile matema-

tice aparţin tipului a priori, dar T 4 C este de tip a posteriori.

Distincţia dintre a priori şi a posteriori este însă mai complicată decît pare la prima vedere. Unele adevăruri, deşi a priori, pot fi verificate prin experienţe senzoriale. Tymoczko dă exemplul aserţiunii: „Suma primelor o sută de numere întregi strict pozitive este egală cu 5050". Este vorba aici de un adevăr a priori, pe care-l obţinem „în cap" prin aplicarea formulei lui Gauss care dă suma unei progresii aritmetice: Adunăm primul cu ultimul termen, înmulţim rezultatul cu numărul termenilor şi împărţim totul la doi. În cazul nostru se obţine produsul dintre 101 şi 50, care poate fi efectuat „în cap" şi constatăm că se obţine 5050. Putem însă proceda şi empiric, luînd un creion şi o foaie de hîrtie şi scriind cele o sută de numere, pe care le adunăm şi obţinem fără îndoială acelaşi rezultat.

Desigur, în exemplul de mai sus utilizarea vederii, a creionului şi hîrtiei nu este obligatorie, ci facultativă. Pentru Tymoczko, T 4 C este un exemplu de adevăr a posteriori, deoarece verificarea sa nu se poate lipsi de o componentă empirică. În acest punct însă, o reacţie critică a venit din partea lui E. R. Swart (*The philosophical implications of the four-color problem*, American Mathematical Monthly, vol. 87, no. 9, 1980, pp. 697—707), care procedează la o analiză amănunţită a demonstraţiei T 4 C, raportînd-o la următoarea structură-tip a demonstraţiilor unor teoreme de teoria grafurilor: a) stabilirea faptului că teorema este adevărată de îndată ce în anumite cazuri, în număr finit, este verificată o anume proprietate; b) obţinerea unei liste a tuturor acestor cazuri; c) confirmarea faptului că proprietatea cerută este satisfăcută în toate cazurile prevăzute în lista precedentă. Desigur, dacă lista este foar-

te scurtă, se poate întîmpla să putem verifica pur mintal îndeplinirea proprietății cerute, după cum, dacă lista este prea lungă (așa cum se întîmplă în demonstrarea T 4 C), verificarea cerută la punctul *c*) devine imposibilă fără ajutorul calculatorului. În acest sens, Tymoczko aprecia că T 4 C este un adevăr a posteriori, nu a priori. Dar, mai totdeauna demonstrația inițială dată unei teoreme a fost ulterior simplificată. Putem spune de pe acum că și T 4 C se supune acestei evoluții. După demonstrația inițială, din 1976, a lui Haken și Appel (la care s-a adăogat Koch) a urmat o altă demonstrație, a lui Frank Allaire *(Another proof of the four-color theorem*, Proceedings of the Seventh Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing, 1977, pp. 3—72), care reduce considerabil numărul orelor de calculator necesare pentru obținerea teoremei.

În raport cu numărul și complexitatea cazurilor care trebuie controlate, teoremele (sau teoremele potențiale) se repartizează în următoarele patru situații (propuse de E. R. Swart): 1) testarea cazurilor poate fi efectuată pur mintal; 2) este necesară folosirea creionului și hîrtiei; 3) testarea cazurilor poate fi efectuată cu creion și hîrtie, dar într-un mod foarte dificil, care reclamă mii de ore de efort; 4) testarea cazurilor depășește posibilitățile calculului manual, necesitînd un calculator electronic. Însă, cu timpul, o aceeași teoremă poate trece dintr-o categorie în alta, deci o teoremă a posteriori poate deveni a priori (la aceasta contribuie esențial perfecționarea tehnicilor de demonstrație matematică). Tocmai din acest motiv, Swart refuză să considere T 4 C ca un adevăr a posteriori, tot așa cum nu putem să considerăm că există numere prime a priori (deoarece putem verifica mintal că nu admit divizori proprii)

și numere prime a posteriori (la care testarea divizorilor nu poate fi efectuată mintal).

Un alt aspect discutat de Tymoczko și reluat de Swart se referă la necesitatea ca o demonstrație matematică să fie convingătoare, controlabilă și formalizabilă. Caracterul a posteriori al T 4 C ar implica faptul că demonstrația ei e formalizabilă, dar nu e controlabilă. Pentru Swart, T 4 C nu e încă suficient controlabilă datorită insuficientei formalizări a demonstrației, această insuficiență fiind determinată de faptul că, deși algoritmul este simplu, implementarea sa pe calculator este departe de a fi simplă. Aici intrăm în problema mai delicată a controlului formal al corectitudinii programelor de calculator; acest control, în forma sa actuală, se aplică în primul rînd unor programe scrise într-un limbaj de nivel superior și mai puțin unor programe scrise într-un limbaj de calculator de tip *assembler*, așa cum sînt cele folosite în demonstrația T 4 C, pentru a face aceste programe cît mai eficiente. Totuși, rezultatele de reductibilitate care apar la Haken, Appel și Koch au putut fi controlate indirect, prin intermediul unor programe de calculator elaborate independent unul de altul și rulate pe calculatoare diferite; în acest fel, lucrurile nu s-au deosebit esențial de procedeul tradițional al controlului manual al unei demonstrații care include un mare număr de cazuri particulare care trebuie testate. În ansamblu însă, controlabilitatea demonstrației lasă încă de dorit (deși s-au înregistrat progrese prin demonstrația lui Allaire), fapt corelat cu acela că formalizarea ei nu a fost încă realizată în mod adecvat. Dar, contrar lui Tymoczko, după care aceasta e o consecință a folosirii calculatorului în demonstrație, Swart crede că este vorba numai de o folosire *inadecvată* a calculatoru-

lui; controlabilitatea va putea fi ameliorată dacă formalizarea va fi mai bună. Progresul se va putea realiza printr-o computerizare mai accentuată a unor porțiuni ale demonstrației (legate de obținerea mulțimii inevitabile de configurații) și prin trecerea la programe scrise într-un limbaj de nivel superior. Desigur, în aceste condiții demonstrația va putea deveni mai convingătoare decît este azi, cînd T 4 C este încă privită ca un rezultat singular, neintegrat efectiv în cadrul teoriei grafurilor.

Swart propune să se introducă un nou tip de entitate, în ceea ce privește aserțiunile matematice, un tip intermediar, care să constituie mai mult decît o conjectură dar mai puțin decît o teoremă. Îi propune și un nume: *agnogramă*. Este vorba, spune Swart, de enunțuri verificate atît cît este posibil, dar al căror adevăr nu ni se probează cu siguranța unei teoreme *(theoremlike statements that we have verified as best we can but whose truth is not known with the kind of assurance we attach to theorems and about wich we must thus remain, to some extent, agnostic)*. Formularea nu este fericită, deoarece poate conferi statutul de agnogramă oricărei proprietăți depinzînd de numărul natural *n*, verificate pentru un mare număr de valori ale lui *n*, dar pentru care nu dispunem de o demonstrație în cazul general, nici de un contraexemplu. Înțelegem însă că noul concept i-a fost sugerat lui Swart de T 4 C, în care Swart vede un precursor al multor agnograme genuine care urmează abia să apară. Ce-i lipsește unei agnograme pentru a deveni o teoremă? Ea trebuie să devină nu pur și simplu controlabilă, dar controlabilă individual de un matematician, controlul fiind confirmat pe această cale de cel puțin doi sau trei matematicieni care au lu-

crat fiecare în mod independent. Swart face o analogie între demonstrațiile matematice și programele de calculator. În ambele cazuri, în funcție de lungime, este necesară o descompunere în module mai mici, relativ independente, care pot fi verificate oarecum pe cont propriu, putîndu-se verifica și modul lor de articulare. (În matematică aceste module sînt cunoscute sub nume ca leme, propoziții, teoreme, corolare etc.)

Pentru a preciza statutul agnogramei, Swart discută mai întîi distincția dintre adevărurile a priori și cele a posteriori, propunînd următoarele criterii: Un adevăr este a priori dacă are o validitate universală și necesară, care cel puțin în principiu (deci nu neapărat și în practică) poate fi stabilită fără a se recurge la experiența senzorială a lumii fizice. Mai dificil este să se precizeze în ce constă un adevăr a posteriori. În mod tradițional, *a posteriori* a însemnat, în acest context, „care poate fi cunoscut numai prin experimente". Swart consideră prea restrictivă această formulare, propunînd o alta: „Un adevăr este a posteriori dacă este contingent cu natura universului la care se aplică și nu poate fi cunoscut în principiu fără efectuarea anumitor experimente". „În principiu" implică aici atît „din necesitate" cît și „prin ipoteză", ipoteza fiind aceea că există mai multe lumi posibile și este necesar să efectuăm experimente pentru a stabili adevărul privind natura lumii noastre particulare. Dar după Swart, există și adevăruri a priori care nu sînt accesibile decît prin intermediul unui experiment; a le refuza caracterul a priori este, pentru Swart, ca și cum ai nega existența bacteriilor din cauză că nu sînt vizibile fără microscop. Deosebirea dintre adevărurile a priori si cele a posteriori se referă la antecedentele lor.

Adevărurile a priori de bază pot fi dobîndite fără a se recurge la experimente, deoarece ele sînt adevăruri care au loc în toate lumile posibile, în timp ce adevărurile a posteriori de bază nu pot fi dobîndite decît experimental, deoarece nu au loc în toate lumile posibile. Însă experimentele implicate în cele două tipuri de adevăruri sînt foarte deosebite ca natură. Adevărurile a priori implică experimente constînd în manipularea de numere și de simboluri logice, în timp ce experimentele presupuse de adevărurile a posteriori constau în măsurători de lungimi, presiune, volum, masă, temperatură, timp și alți parametri fizici.

Care este, în lumina acestor considerații, statutul agnogramelor? Swart nu le încadrează nici printre adevărurile a priori, nici printre cele a posteriori, ci le consideră conjecturi cu un grad mai înalt de credibilitate, cu alte cuvinte agnogramele nu se află la jumătatea drumului între conjecturi și teoreme, ci mai aproape de primele. În acest punct însă Swart manifestă o anumită ezitare între a considera T 4 C o agnogramă sau un adevăr a priori, adică o teoremă; în nici un caz un adevăr a posteriori, cum o consideră Tymoczko. Dacă T 4 C este considerată o agnogramă, justificarea acestui fapt nu este pur și simplu dependența demonstrației ei de calculatorul electronic. În ceea ce privește adevărurile a posteriori, Swart invocă pe fizicieni, care nu acceptă automat în clasa acestor adevăruri rezultatele unor experimente inadecvat verificate, și pe matematicieni, care nu introduc automat aici orice rezultat al unei demonstrații insuficient controlabile; cu alte cuvinte, faptul că un rezultat nu poate fi acceptat ca a priori nu-l transformă automat **într-unul a posteriori.**

În ultimă instanță, Swart recunoaște că distincția a priori — a posteriori nu strălucește prin claritate. Teoria epistemologică a lui Eddington — observă Swart — era bazată pe supoziția că lumea fizică, așa cum o cunoaștem, este, într-un sens foarte profund, singura lume posibilă care poate exista și căreia Eddington (*Fundamental Theory,* Cambridge University Press, 1949), a încercat să-i determine caracteristicile de bază. Filozofia subiacentă acestei gîndiri s-ar putea dovedi mai adecvată decît oricare alta, crede Swart. Dacă ar deveni posibil să se determine o cantitate fără dimensiune de o manieră acceptabilă pentru fizicieni, aceasta ar face foarte greu de menținut distincția dintre adevărurile a priori și cele a posteriori.

Să ne întoarcem la T 4 C. Chiar imediat după publicarea demonstrației lui Haken și Appel era vizibilă dificultatea de a controla dacă lista lor de 1482 de configurații inevitabile epuizează configurațiile de acest tip. Așa se explică faptul că unii au contestat-o pur și simplu (G. Spencer-Brown, *The laws of form,* E. P. Dutton, New York, 1979). Tymoczko exprimă la rîndul său o îndoială, cu ajutorul unei metafore de o semnificație mai generală. El compară folosirea de către pămînteni a calculatorului electronic în demonstrarea unei teoreme matematice cu folosirea de către marțieni a unui geniu matematic (pe nume Simon), care justifică lemele sale și chiar unele teoreme (cu precădere cele de natură combinatorială) prin referire la verificările pe care le-a efectuat personal, la rectitudinea sa morală sau la statura sa politică. Recunoaștem în personajul Simon o metaforă a calculatorului electronic; însă o metaforă pe care unii, ca Swart, o contestă.

Discuția rămîne deschisă.

GÎNDIREA ȘAHISTĂ, ÎNTRE ALGORITM ȘI INTUIȚIE

Este cunoscut rolul pe care l-au avut jocurile de noroc în stimularea primilor pași de dezvoltare a teoriei probabilităților, teorie care ulterior a devenit unul dintre instrumentele cele mai puternice de valorificare a matematicii în științele naturii, în tehnică, în viața socială. Treptat, și celelalte jocuri, bazate pe strategie, au intrat în atenția cercetătorilor. Încă în prima parte a secolului nostru, un mare matematician francez a scris o carte despre teoria matematică a jocului de bridge. În anii celui de-al doilea război mondial s-a născut o nouă ramură a matematicii, numită teoria jocurilor. Referindu-se la jocurile de strategie, această teorie atrage atenția asupra faptului că diferite situații de joc strategic apar în activități dintre cele mai variate, de la economie la război și de la relații personale la tratative diplomatice.

Unul dintre jocurile strategice cele mai complexe este, fără îndoială, șahul. Studiat de sute de ani, șahul nu și-a dezvăluit nici pe departe toate misterele. El constituie o adevărată punere la încercare a dibăciei, a imaginației, a spiritului de observație, a forței de concentrare a atenției. De fapt nici nu știm încă prea bine ce structuri psihice sînt solicitate cu precădere în jocul de șah. Această ignoranță este, în bună măsură, o consecință a alteia, mai grave; știm încă prea puțin despre condițiile și despre mecanismele intime de declanșare și funcționare a talentului, a abilității, a diferitelor tipuri de dexteritate, de îndemînare, de pricepere. A apărut atunci în mod firesc următoarea întrebare: Nu s-ar putea considera gîndirea șahistă ca o aproximație, ca un model al gîndirii problematice în genere?

O atare strategie s-a configurat încă în urmă cu vreo 25—30 de ani, odată cu dezvoltarea teoriei informației, calculatoarelor electronice și inteligenței artificiale. Claude Shannon, creatorul teoriei informației, a fost primul care a elaborat un plan al jocului de șah cu ajutorul calculatorului. Acest plan folosea strategia mini-max cunoscută din teoria matematică a jocurilor. Aceasta se întîmpla în 1949. Un an mai tîrziu, apare un articol în acest sens (C. E. Shannon, *Programming a computer for playing chess*, Philosophical Magazine, no. 41, 1950, pp. 256—275). Automatele imaginate anterior ascundeau totdeauna un jucător uman. Pentru Shannon, șahul oferea un mijloc ideal de testare a posibilității unor mașini inteligente, deoarece jocul este definit prin reguli precise, distincția dintre ceea ce este permis și ceea ce este interzis este riguroasă iar scopul este clar: obținerea matului. Șahul nu este nici prea simplu pentru a deveni banal, nici prea complex pentru a deveni imposibil. Shannon nu considera că un program de șah pentru calculator trebuie să imite șahul uman. Ulterior, M. Botvinnik, fostul campion mondial de șah, avea să elaboreze o altă concepție, după care șahul computațional trebuie să simuleze șahul uman (M. M. Botvinnik, *Computers, Chess and Longrange Planning*, Springer Verlag, New York, 1970).

Dar cum joacă oamenii șah? După părerea lui Neil Charness, care în 1974 a susținut o teză de doctorat privind psihologia jocului de șah, într-o partidă de șah, oamenii se bazează pe capacitatea lor de memorie și pe organizarea informației în termeni de configurații plauzibile de piese, mișcări posibile și consecințe ale lor. Desigur, în materie de memorie și de stocare și organizare a informației, calculatoarele au posibilități foarte mari. Însă mo-

dul uman de rezolvare a problemelor se bazează în mare măsură pe recunoașterea asemănărilor dintre situații tip *(patterns)* și pe actualizarea informației relevante într-o situație specifică. Tocmai aceste aptitudini lipsesc calculatoarelor moderne; capacitatea lor de recunoaștere a formelor *(pattern-recognition)* este încă rudimentară iar memoria lor, foarte largă și rapidă, este totuși organizată într-un mod simplist, care nu permite implementarea unor strategii de căutare bazate pe asemănări structurale sau conceptuale. În aceste condiții, este remarcabil faptul că, deși elaborate într-un moment în care calculatoarele electronice erau incomparabil mai slabe decît cele de azi iar cunoștințele despre procesele de prelucrare a informației erau net inferioare celor de azi, ideile lui Shannon stau la baza celor mai puternice programe recente de șah computațional, cum ar fi KAISSA (elaborat la Institutul de știința controlului, Moscova) și CHESS 4.5 (elaborat la Universitatea Northwestern, Evanston, Illinois, S.U.A.).

În momentul de față, echipe mixte formate din psihologi, informaticieni și, bineînțeles, șahiști au trecut la studiul sistematic, din punct de vedere psihologic, logic și computațional, al jocului de șah. Pentru a înțelege mai bine aspectul computațional al șahului, trebuie să ținem seamă că revoluția adusă de calculatoarele electronice nu este numai o mutație în domeniul tehnicii, ci și o schimbare radicală în gîndirea umană. Într-adevăr, informatica a promovat și generalizat gîndirea algoritmică, marcată de un grad superior de explicitare a elementelor, etapelor și alternativelor care apar în diferite procese din natură și societate. Reprezentarea algoritmică a unui proces este o condiție esențială pentru programarea sa la un calculator electronic. Potențial, șahul este de natură algoritmică, dar reprezen-

tarea efectivă, sub forma de algoritm, a diferitelor situații strategice care apar în jocul de șah este dificilă, datorită complexității lor deosebite, complexitate despre care se știe acum că este mult mai mare decît s-a crezut în urmă cu 20 și chiar în urmă cu zece ani. Abia acum începem să formulăm cu claritate problemele modelării algoritmice și programării la calculator a jocului de șah. Așa se explică faptul că nu dispunem încă de modele matematice ale acestui joc, modele care însă ar putea să apară într-un viitor apropiat.

Cercetarea psihologică și computațională a gîndirii șahiste a confirmat o idee mai veche, conform căreia cea mai dificilă etapă în rezolvarea unei probleme este formularea ei adecvată; în cazul șahului, formularea trebuie să se refere direct la modul în care un jucător procedează pentru a alege o mutare. A existat multă vreme impresia, probabil dominantă și azi, că a fi un bun jucător de șah înseamnă în primul rînd a dispune de o capacitate deductivă deosebită, de o gîndire combinatorială capabilă să-ți permită anticiparea desfășurării unei partide în diferite ipoteze privind alegerea unor mutări și răspunsurile adversarului. Cercetările recente (a se vedea cartea editată de Peter W. Frey, *Chess Skill in Man and Machine*, Springer Verlag, New York, 1977, fundamentală pentru întreaga problematică discutată aici) desmint categoric această impresie. Procesul de alegere a unei mutări pare să implice în primul rînd calitatea percepției și, în particular, capacitatea de a recunoaște mii și mii de procedee de joc disponibile, deci acumulate și inventariate de experiența șahistă anterioară.

Șahul s-a dovedit a fi nu atît un joc de gîndire adîncă, cît unul de observație, de percepție a situației de pe tabla de joc. Așa se explică de ce unui maestru

al șahului îi este uneori suficientă o privire sumară pentru a sesiza mutarea cea mai bună, în timp ce un începător reflectează îndelung și, de cele mai multe ori, tot nu găsește mutarea corectă. Ceea ce-i deosebește nu este profunzimea gîndirii. Arborele de posibilități care mereu se ramifică în funcție de răspunsul adversarului este examinat pînă la un nivel care este cam același și la un simplu amator și la un specialist; acest nivel nu este determinat de gradul de pregătire șahistă, ci de restricțiile generale care guvernează atenția, memoria și rațiunea umană. Însă, în timp ce profanul examinează orbește aceste posibilități, ca și cum ar fi toate la fel de importante (sau de neimportante), cunoscătorul le ierarhizează aproape spontan, dînd prioritate anumitor variante. H. A. **Simon și W. G. Chase** (*Skill in Chess*, American Scientist, no. 61, 1973, pp. 394—403) sînt de părere că această capacitate selectivă se obține pur și simplu prin practică. Așa cum nu poți deveni un pianist de concert dacă te rezumi la o singură oră de exercițiu pe zi, nu poți deveni un maestru în șah dacă-i acorzi numai o oră pe zi. S-a constatat că este nevoie de vreo zece ani de preocupare șahistă intensă, neîntreruptă, pentru a deveni un mare maestru, de la această regulă nefăcînd excepție nici măcar copii minune ai șahului, de la Capablanca pînă la Fischer. Dar prin practică Simon și Chase nu înțeleg pur și simplu memorarea a vreo 50 000 de scheme, ci capacitatea de a le organiza pe tipuri (un fel de repartizare a schemelor, a pozițiilor posibile în clase de echivalență), capacitatea de a recunoaște aceste tipuri în situații inedite (deci în eventuale nuanțe noi) și cunoașterea planurilor și metodelor de joc corespunzătoare diferitelor tipuri de poziții. Nu cumva se pot învăța aceste lucruri din cărți? Unele cărți încearcă să-i ajute pe șahiști

în această privință, prin considerații de forma: Cînd vă aflați în prezența cutărei scheme sau poziții, încercați cutare plan. Dar, de cele mai multe ori, diferitele tipuri de poziții se pretează cu dificultate la o descriere prin mijloace lingvistice; numai percepția lor directă este eficientă. În șah (ca și în știință) nu există drumuri scutite de efort.

Marele maestru A. Kotov a încercat să sistematizeze în cinci imperative condițiile pentru a deveni un mare maestru (*Think like a Grandmaster*, Chess Digest, Dallas, 1971): 1. Să cunoști teoria deschiderii; 2. Să cunoști principiile subiacente diferitelor poziții tipice în faza de mijloc a jocului; 3. Să evaluezi cu acuratețe poziția în care te găsești; 4. Să sesizezi planul cel mai indicat într-o poziție dată; 5. Să calculezi cu rapiditate și corectitudine diferitele schimbări care pot surveni.

Va putea omul să realizeze programe de calculator care să dobîndească și, apoi, să depășească performanțele sale șahiste nemijlocite? Deocamdată, aceste programe ating nivelul unui maestru în șah. David N. Levy (autor, împreună cu J. E. Hayes, al cărții *The world computer chess championship*, Edinburgh University Press, Woodland Hills, California, 1976) a propus în 1973 un pariu cercetătorilor în domeniul șahului computațional, în sensul că nici un program de șah computațional nu-l va putea învinge pînă în 1978. A se vedea articolul său *Computer chess-part, present and future* (Chess Life & Review, no. 28, 1973, pp. 723—726). Levy a cîștigat pariul și probabil că l-ar cîștiga și pentru un nou termen de cinci ani sau chiar de zece ani (deci pînă în 1988). După Levy, problema cea mai grea pentru calculator o constituie finalurile de partidă.

Omul este, prin excelență, o ființă care învață în mod continuu din experiență și care adaugă me-

reu noi informații și principii bazei sale cognitive. („Nu voi mai juca niciodată cutare mutare în cutare deschidere", „Pentru a cîștiga un astfel de final, trebuie să dispun de pioni în cutare configurație" etc.). O atare capacitate de învățare nu este încă implementată în programele de șah computațional. Aceste programe nu au înglobat încă nici măcar toate cuceririle inteligenței artificiale, de exemplu cele care țin de inferența inductivă și deductivă (T. Winograd, *Understanding natural language*, Cognitive Psychology, no. 3, 1972, pp. 1—191).

Șahul a devenit de multă vreme o metaforă de referință în ceea ce privește obiectele care funcționează nu pe baza proprietăților lor intrinseci, ci ca urmare a modului în care se operează cu ele. Într-adevăr, o piesă în jocul de șah nu este relevantă prin substanța din care este alcătuită (lemn, carton, material plastic etc.). Nici măcar forma nu este esențială; am putea utiliza piese identice ca formă (deși ar fi incomod), urmînd a le distinge printr-un semn, de exemplu P pentru pion, C pentru cal ș.a.m.d. Singurul fapt semnificativ sînt regulile care definesc mișcările pieselor pe tabla de șah. Această situație l-a condus pe Ferdinand de Saussure, unul dintre creatorii lingvisticii structurale, să compare limba cu șahul. Într-un caz ca și în celălalt utilizăm o gramatică, adică un ansamblu de reguli care explică modul de folosire a obiectelor. Nu substanța fonică a sunetelor, ci relațiile dintre sunete definesc funcția lor lingvistică. Însă, în timp ce la șah regulile sînt introduse de la început și într-o formă explicită, în limbă regulile trebuie descoperite prin analiză, găsirea lor constituind obiectul principal al analizei lingvistice.

Dacă funcția metaforică a șahului are o lungă tradiție atît în știință cît și în artă (unde regulile

devin din ce în ce mai relevante), funcția sa de modelare a proceselor de gîndire este de dată mult mai recentă. Din acest punct de vedere, inițiativa a venit nu atît din partea șahiștilor, cît a psihologilor și a specialiștilor în inteligență artificială. Procesele de învățare (aflate din ce în ce mai mult în atenția cercetătorilor, după cum rezultă și dintr-un Raport către Clubul de la Roma), modul în care lucrează memoria umană, mecanismele psihice de rezolvare a unei probleme s-au dovedit prea delicate pentru a fi atacate frontal și în toată complexitatea lor. S-a simțit nevoia unei reprezentări simplificate a acestor activități, care să ofere o șansă mai mare de înțelegere (chiar dacă mai puțin profundă) a lor. În această privință, șahul — prin amestecul de precizie și complexitate, de rațională și mister pe care-l oferă — a dat multe speranțe cercetătorilor. S-a crezut că precizia șahului va face lesne posibilă reprezentarea sa algoritmică iar complexitatea sa, considerată de natură exclusiv combinatorie, va putea fi modelată pe un calculator suficient de puternic ca memorie și viteză. Aceste considerente l-au determinat în 1957, pe specialistul în șah computațional Herbert Simon să afirme că în decurs de zece ani campionul mondial de șah nu va mai fi un om, ci un program de calculator; dar, dezamăgire: în 1975, un alt cercetător al șahului computațional, Earl Hunt, constată că programele de șah computațional sînt încă adversari care nu pun probleme unui maestru al șahului.

Optimiști de tipul lui Simon (care, între timp, și-a schimbat punctul de vedere) există și astăzi, ca și sceptici de genul lui Hunt. Ceea ce-i desparte este o chestiune de concepție. Primii cred că problemele care mai rămîn să fie rezolvate în șahul computațional sînt exclusiv de natură tehnică (vi-

teză, capacitate de memorie, posibilitatea de a dispune de un număr cît mai mare de ore de calculator) și că rezolvarea lor este apropiată, în timp ce ceilalți consideră că ignoranța este mai profundă, referindu-se nu numai și nici măcar în primul rînd la chestiuni tehnice, ci la procesele psihice care condiționează șahul de performanță. Dacă aceste procese ar putea fi elucidate, am obține probabil un spor important de înțelegere a multor altor situații în care trebuie luate decizii depinzînd de mulți parametri și trebuie rezolvate probleme de un înalt grad de complexitate. O ipoteză implicită, dar fundamentală, admisă aici, este aceea a asemănării de structură dintre activitatea mașinilor și aceea a creierului și a sistemului nervos.

Însă cele mai multe dintre programele existente de șah computațional au fost ghidate nu de o modelare conceptual-teoretică a gîndirii șahiste, ci de procedee ad-hoc empirico-tehnologice. Este bine? Este rău? Desigur, apare legitimă dorința de a pătrunde structurile psihice puse în mișcare de gîndirea șahistă, dar această dorință ar putea fi blocată tocmai de dificultatea realizării ei. În același timp, domeniul inteligenței artificiale este bogat în reușite care nu s-au bazat pe simularea activității umane corespunzătoare; astfel, o mînă artificială nu este controlată în același fel în care creierul uman controlează o mînă naturală. Eliot Hearst, maestru de șah și profesor de psihologie la Universitatea Indiana (S.U.A.), este de părere că anumite progrese în șahul computațional, indiferent de strategia adoptată, ar putea conduce la noi posibilități de abordare computațională a unor probleme deosebit de complexe, cum ar fi controlul inflației și diagnosticul unor boli. Aceste probleme sînt considerate mai dificile decît altele, rezolvate, privind abordarea

computațională a aterizării cu succes a avioanelor, a organizării orarelor de lucru în întreprinderi, a activității de proiectare și a celei de tipărire a manualelor.

Într-o perspectivă mai amplă, nu poate fi eludat aspectul conceptual-teoretic al șahului computațional. Numeroase experiențe anterioare sînt semnificative în acest sens. Astfel, problema traducerii automate, elaborate, în urmă cu 30—35 de ani, prin procedee ad-hoc, empirico-tehnologice, este în ultima vreme confruntată din ce în ce mai mult cu aspecte teoretice (semantice și pragmatice, cu precădere) ale lingvisticii și ale traducerii, dificultățile fiind considerate în primul rînd de ordin lingvistic, nu ingineresc. Entuziasmului inițial, care prevedea o rapidă utilizare pe scară industrială a programelor de traducere automată dintr-o limbă în alta, i-a luat loc o atitudine mai moderată, de evaluare lucidă a dificultăților și perspectivelor. O situație similară a survenit și în ceea ce privește prelucrarea automată a informației din diferite domenii ale științei tehnologiei și vieții practice (documentare automată, rezumare automată etc.). Progresele nu lipsesc (mai cu seamă în domeniul chimiei organice, al biologiei și al medicinei), dar ele nu au caracterul spectaculos scontat inițial. Această situație îl determinase pe David Hays, unul dintre autorii cei mai importanți în domeniul lingvisticii computaționale, să publice, în urmă cu vreo 16 ani, un articol cu titlul semnificativ *The future may be science-fiction, but it is still fiction* (Viitorul poate fi știință-ficțiune, dar el este încă o ficțiune).

Dintre cercetătorii care au adoptat, în domeniul șahului computațional, o strategie mai dificilă, vizînd nu succese imediate, ci obiective mai îndepărtate, dar mai profunde, putem menționa pe A. Newell,

J. Shaw și H. Simon (*Chess-playing programs and the problem of complexity*, IBM J. Res. Develop., no. 2, 1958, pp. 320—335); Newell și Simon au publicat ulterior o carte semnificativă (*Human problem solving*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.). Pentru astfel de autori, șahul computațional trebuie să se sprijine pe modele ipotetic-explicative privind funcționarea gîndirii umane, formarea conceptelor și rezolvarea problemelor inexacte; în aceste condiții, el are un impact direct asupra unor domenii ca economia, psihologia, matematica și, cu deosebire, asupra educației gîndirii. Într-adevăr, șahul computațional, prin obligația de a-și explicita structura algoritmică, este o școală excelentă a procedării sistematice, în etape, de la probleme simple la probleme mai puțin simple, prin gradarea crescîndă a dificultăților.

Care este, în momentul de față (adică la data redactării acestui text, în 1984), nivelul atins de șahul computațional și care sînt perspectivele sale? Pentru a răspunde cu precizie la această întrebare, ar trebui să explicăm mai întîi ierarhia existentă în șahul computațional, o ierarhie destul de complicată și care, cel puțin în zona ei inferioară, nu pare să fie aceeași în toate țările. Vom spune doar că, în ordinea crescîndă, există cîteva categorii de calificare, fie ele E, D, C, B și A, inferioare titlului de candidat de maestru (echivalent cu ceea ce americanii numesc *expert*?), apoi titlul de maestru. Mai sus nu este nevoie să mergem, deoarece programele actuale de șah computațional nu depășesc valoarea unui maestru internațional (precizăm însă că informația noastră nu este chiar la zi; ea se oprește la anul 1978). În 1975, Eliot Hearst (despre care am mai vorbit mai sus) era de părere că nu este de așteptat, pentru un viitor apropiat, atingerea compe-

tenței unui candidat de maestru. În acea vreme, performanța șahului computațional era echivalentă cu aceea a unui jucător de categoria C. În 1976 însă, programul CHESS 4.5 al Universității Northwestern (S.U.A.) a repurtat cinci victorii asupra unor jucători de categoria B. În cartea editată de Frey în 1977—1978 și care a fost menționată mai sus, Hearst este de părere că numai prin ameliorări de ordin tehnologic, privind capacitatea de memorie și viteza de calcul, programele de șah computațional nu vor putea atinge nivelul unui candidat de maestru. Va fi necesar un efort considerabil pentru introducerea, în procesele de memorare și evaluare considerate în aceste programe, a unor structuri și tipare care rezumă o serie de procedee standardizate de experiența șahistă. Va trebui de asemenea găsită o modalitate prin care informația obținută prin anumite mutări să poată fi transferată în desfășurarea ulterioară a programului. Însă această capacitate de autoînvățare nu va putea fi implementată în programele de șah computațional în condițiile nivelului actual al tehnologiei calculatoarelor; deci, fără a fi o condiție suficentă, realizarea unor parametri tehnologici superiori celor de azi este totuși o condiție necesară pentru depășirea sensibilă a performanțelor actuale ale șahului computațional.

Acestea sînt dificultățile și șansele, eșecurile și speranțele unuia dintre domeniile cele mai captivante ale inteligenței artificiale. Din numărul pe decembrie 1979 (p. 4678) al revistei Mathematical Reviews aflăm că un nou volum din seria *Advances in Computer Chess* (Edinburg University Press) este pe cale să apară (probabil că, între timp, a și apărut). La 20 ani după cartea lui A. D. de Groot (*Thought and choice in chess*, Mouton, Haga, 1965) și la zece ani după aceea a lui M. Newborn (*Computer chess*,

Academic Press, New York, 1975), ne aflăm în fața unor noi progrese ale acestei cercetări fascinante.

Independent de ceea ce se va întîmpla în continuare, șocul psihologic s-a produs. Am asistat recent la partide de șah jucate de simpli amatori ai șahului cu parteneri acționați pe bază de program de calculator *(computer chess challenger)*. Am putut vedea stupoarea cu care o ființă umană dotată cu o inteligență superioară (manifestată creator într-un domeniu sau altul al științei) primea mutarea de mat din partea unui partener acționat mecanic. În mod paradoxal, o mare victorie a omului, ca specie, ia, la nivelul percepției individuale, aspectul unei înfrîngeri.

GÎNDIREA EURISTICĂ ȘI ARTA DE A GĂSI UN INTERLOCUTOR

Un eveniment recent a stîrnit o vîlvă deosebită în lumea științifică. Este vorba de confirmarea unei celebre conjecturi a lui Bieberbach. Prin latura ei umană, istoria de 70 de ani a acestei conjecturi merită să fie cunoscută de un public mai larg. Numărul din 7 septembrie 1984 al revistei americane Science îi consacră un articol care ne-a furnizat informația utilizată în considerațiile de mai jos.

Este vorba de problema pusă în 1916 de matematicianul german Ludwig Bieberbach. Enunțul ei nu depășește decît puțin cunoștințele actuale de matematică școlară, ceea ce ne permite să-l reproducem aici. Orice absolvent de liceu știe ce este un polinom și ce este un număr complex. Un polinom de gradul n are forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. Să presupunem că în locul variabilei reale x introducem variabila complexă z, permițînd totodată coeficienți-

lor a_0, a_1, ..., a_n să fie numere complexe. Amintim că un număr complex este de forma $x + iy$, unde x și y sînt numere reale iar i este așa-numitul simbol imaginar (rădăcina pătrată a lui minus unu). Să presupunem acum că în locul polinomului de grad n considerăm un „polinom de grad infinit" de variabila complexă z, cu valori de asemenea complexe. Un astfel de polinom se numește o *serie de puteri* iar suma $f(z)$ a acestei serii (care se obține din polinomul de grad n prin trecere la limită cînd n tinde la infinit) se numește o *funcție analitică*. Problema lui Bieberbach se referă la mărimea coeficienților a_n. Enunțul precis al conjecturii sale este următorul: Dacă $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, iar pentru z în modul inferior sau egal lui unu (modulul lui z este rădăcina pătrată a sumei pătratelor lui x și y) funcție analitică $f(z)$ nu ia nici o valoare mai mult de o singură dată, atunci coeficientul de rang n nu întrece valoarea n (oricare ar fi n natural).

Nu putem intra aici într-o discuție despre semnificația acestei conjecturi. Ne vom limita la faptul că noțiunea de funcție analitică este fundamentală în Analiza matematică și în aplicațiile ei, de la teoria ecuațiilor diferențiale pînă la domenii practice de mecanică. Școala românească de matematică are contribuții fundamentale în acest domeniu, în special prin lucrările lui Simion Stoilow și ale discipolilor săi.

Bieberbach nu a putut demonstra decît începutul ipotezei sale. El a arătat că cel de al doilea coeficient nu întrece pe doi. Ca și în alte probleme celebre cu enunț relativ elementar, drumul spre soluție s-a dovedit lung și meticulos, fiind obținut prin acumularea unor rezultate parțiale din ce în ce mai fine. S-a confirmat încă o dată că în știință

terenul se cîștigă milimetru cu milimetru, că este nevoie de multă răbdare, suplimentată mereu de cîte un gînd proaspăt. La șapte ani de la formularea conjecturii, deci în 1923, un alt matematician german, Charles Loewner, arată că și cel de al treilea coeficient se supune ipotezei lui Bieberbach, adică nu-l întrece pe trei. Pasul următor este realizat de doi matematicieni de la Universitatea din Stanford (California), care arată că cel de al patrulea coeficient nu depășește în modul pe patru.

Se profila astfel o înaintare în pași de melc spre demonstrarea conjecturii lui Bieberbach, dar o înaintare reclamînd un timp infinit, dacă nu se cristaliza o idee nouă, mai puternică, în virtutea căreia să se poată raționa asupra ansamblului coeficienților. Dar pînă la apariția acestei idei mai era nevoie de eforturi considerabile. În 1968, încă un coeficient se dovedește conform cu ipoteza lui Bieberbach, dar acesta nu este coeficientul al cincilea (căruia îi vine rîndul abia în 1978), ci coeficientul al șaselea.

Paralel cu această abordare „coeficient cu coeficient", din care se spera să se desprindă, prin inducție, o modalitate de a aborda un coeficient generic, s-a folosit și o altă strategie, frecventă mai cu seamă în problemele cele mai dificile din teoria analitică a numerelor (de exemplu, în unele chestiuni delicate de aproximație diofantică). Această strategie se află, față de precedenta, într-o situație complementară. În loc de a se aborda un coeficient particular, se trece direct la un coeficient de rang neprecizat, să spunem n, dar această îndrăzneală este temperată de un anumit compromis în ceea ce privește inegalitatea propusă de Bieberbach; anume, în loc de a se arăta că numărul n nu este mai mic decît modulul coeficientului de rang n, se arată că

acest coeficient în modul este mai mic decît sau egal cu produsul dintre n și un număr anumit, să-i spunem p, superior lui unu, dar cît mai aproape de unu. Primul rezultat de acest fel a fost obținut de un englez, Dudley Littlewood, în 1925, pentru p egal cu baza e a logaritmilor naturali. O ameliorare importantă a acestui rezultat a venit abia după vreo 50 de ani, cînd I. M. Milin, de la Universitatea din Leningrad, a redus valoarea lui p la 1,24. Apoi, Carl Fitz Gerald, de la Universitatea din California, San Diego, a redus valoarea lui p la 1,08, pentru ca studentul său, David Horovitz, s-o reducă la 1,07.

Evident, și această cursă, ca și precedenta, fascinantă prin desfășurarea ei imprevizibilă, prin caracterul provocator al fiecărei etape, care parcă face inevitabilă o etapă ulterioară, risca să devină fără sfîrșit, amînînd mereu răspunsul așteptat. Era nevoie de o idee mai puternică, pentru a se scurtcircuita șirul aparent infinit de etape intermediare.

De obicei, în astfel de situații, răspunsul vine fie din partea unui matematician de mare prestigiu în domeniul său, fie din partea unui matematician prea tînăr pentru a fi dobîndit o oarecare notorietate. În ceea ce privește problema lui Bieberbach, s-a întîmplat altfel. Cel care, în martie 1984, pretindea că a demonstrat conjectura lui Bieberbach nu era un necunoscut, dar nici de prestigiu în lumea matematică nu se bucura. Este vorba de Louis de Branges, de la Universitatea Purdue a statului Indiana (S.U.A.). Acest matematician, trecut azi de 50 de ani, scandalizase lumea științifică de cîteva ori în ultimii treizeci de ani prin pretenția de a fi rezolvat unele probleme importante, pretenție care ulterior s-a dovedit nefondată. Ca-n povestea bine cunoscută cu ciobanul, lupul și oile, de Branges n-a fost crezut nici în ceea ce privește demonstrarea

LICEUL SPICONE BIBLIOTECA BUCUREȘTI

conjecturii lui Bieberbach. Mai mult decît atît, nimeni nu voia măcar să citească voluminosul său manuscris de aproape 400 de pagini, atît de puternică era impresia că undeva trebuie să fie o greşeală. La această situaţie contribuia şi faptul că mai multe demonstraţii propuse anterior, de către diverşi autori, pentru conjectura lui Bieberbach, se dovediseră, toate, greşite. Pînă la urmă s-a găsit un matematician care să accepte să citească manuscrisul lui de Branges dar şi acesta a renunţat în momentul în care întîlnise unele erori.

Ce poate face un om într-o asemenea situaţie, în care se vede asediat de o neîncredere generală? Louis de Branges nu a disperat, dorinţa sa de „reabilitare" era legitimă, el mersese multă vreme la risc, investindu-şi eforturile în probleme poate prea grele pentru momentul în care le abordase. Ambiţia sa de afirmare îşi găsea acoperire într-o pasiune corespunzătoare şi o consecvenţă remarcabilă. La problema lui Bieberbach lucrase şapte ani.

De Branges a găsit resursele necesare pentru a ieşi din impas. Ideea i-a fost sugerată chiar de modul în care găsise soluţia. El fusese frapat de o problemă propusă de Milin în 1971, o problemă mai grea decît problema lui Bieberbach. Răspunsul afirmativ la problema lui Milin implica un răspuns similar la problema lui Bieberbach. Pare un act necugetat, dacă nu o nebunie, ca atunci cînd nu poţi rezolva o anumită problemă să încerci să rezolvi o problemă mai grea. Şi totuşi, metoda inventată de L. de Branges nu putea fi aplicată direct problemei lui Bieberbach, ci avea nevoie de un intermediar: problema lui Milin. Nu era atunci firesc să-i propună lui Milin de a fi primul său interlocutor în această chestiune? Legătura poştală ar fi fost insuficientă într-o astfel de situaţie. Era nevoie de un contact

personal, direct, cu I. M. Milin și cu colegii acestuia. O deplasare la Leningrad se impunea. O împrejurare avea să-i fie favorabilă. Acordul de schimburi științifice între Academia de Științe din Statele Unite și aceea din U.R.S.S. i-a permis lui de Branges să beneficieze de un stagiu de un trimestru în U.R.S.S.

Așa s-a ajuns ca, în perioada aprilie-iunie 1984, L. de Branges să se afle în dialog cu Milin și cu colegii săi, E. G. Emelianov și G. V. Kuzmina. Inițial, nici noii interlocutori ai lui de Branges nu erau prea încrezători în valoarea demonstrației pe care acesta o propunea; ei au avut totuși răbdarea să-l asculte timp de cinci zile, cîte patru ore pe zi. Greșelile identificate anterior în textul lui de Branges erau reale, dar nici una nu s-a dovedit a fi esențială. Victoria lui L. de Branges nu mai putea fi pusă la îndoială. Mai mult decît atît, difuzarea cîtorva copii ale textului lui de Branges a permis lui Carl Fitz Gerald și Christian Pommerenke de la Universitatea Tehnică din Berlinul occidental să simplifice demonstrația conjecturii lui Bieberbach.

Consecințele acestui rezultat nu pot fi încă evaluate. S-ar putea ca metoda să aibă o semnificație mai generală. Oricum, Louis de Branges se află acum în admirația unei lumi care timp de 30 de ani l-a privit cu scepticism și ironie. Dar mai e un aspect: cuvinte devenite clișeu, de tipul „cooperarea științifică internațională", se dovedesc în acest caz capabile să exprime o realitate de importanță crucială pentru progresul cunoașterii.

Modurile de gîndire prezentate în lucrarea de față sub aspectul implicării lor în știință prezintă aspecte filozofice interesante asupra cărora nu s-a putut insista aici. Pentru a da un singur exemplu, vom menționa remarcabila contribuție a lui Constantin Noica în privința gîndirii triadice.

LICEUL BIBLIOTECA BUCUREȘTI

Redactor: MARIA BORICEAN
Tehnoredactor: OLIMPIU POPA

Bun de tipar: 15.09.1987
Coli de tipar: 3,75

ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ CLUJ,
Municipiul Cluj-Napoca
Bul. Lenin nr. 146.
C-da nr. 326

STIINTA PENTRU TOTI

281

Cultura științifică nu este atit o aglomerare de informații cit dezvoltarea unor moduri de gîndire. Cîteva dintre aceste moduri, cum ar fi gîndirea combinatorială și cea selectivă, gîndirea prin metafore și cea prin modele, gîndirea binală și cea triadică, gîndirea topologică și cea energetic-entropică sînt discutate în lucrarea de față.

Editura Științifică și Enciclopedică

Lei 4,50